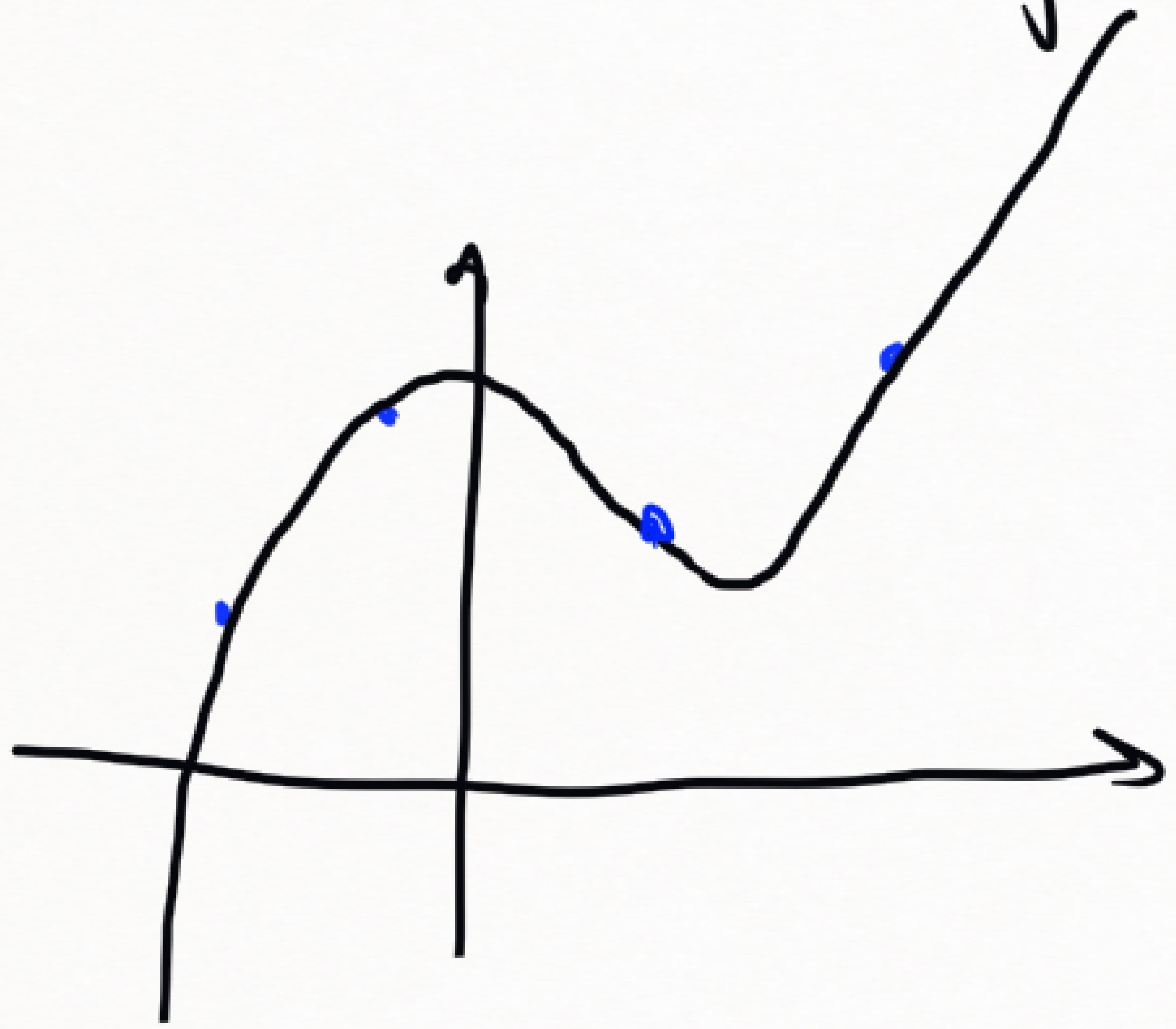
Interpolación polinomial ; Interpolación a trozos

↳ lineal a trozos
↳ cúbico a trozos.

Prop: $n+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ $\Longrightarrow$ $\exists!$ polinomio de grado $\leq n$ que interpola los puntos.

$\forall i = 0, \ldots, n \quad p(x_i) = y_i$



- El polinomio es único. Vemos 3 formas distintas de hallarlo: Vandermonde, Lagrange, Newton.

puede estar mal condicionado

Vamos a implementar el método de Lagrange.

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \dots,\ (x_n, y_n)$$

$$p(x) = y_0 L_n^0(x) + y_1 L_n^1(x) + \dots + y_n L_n^n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_n^i(x)$$

polinomios de base de Lagrange

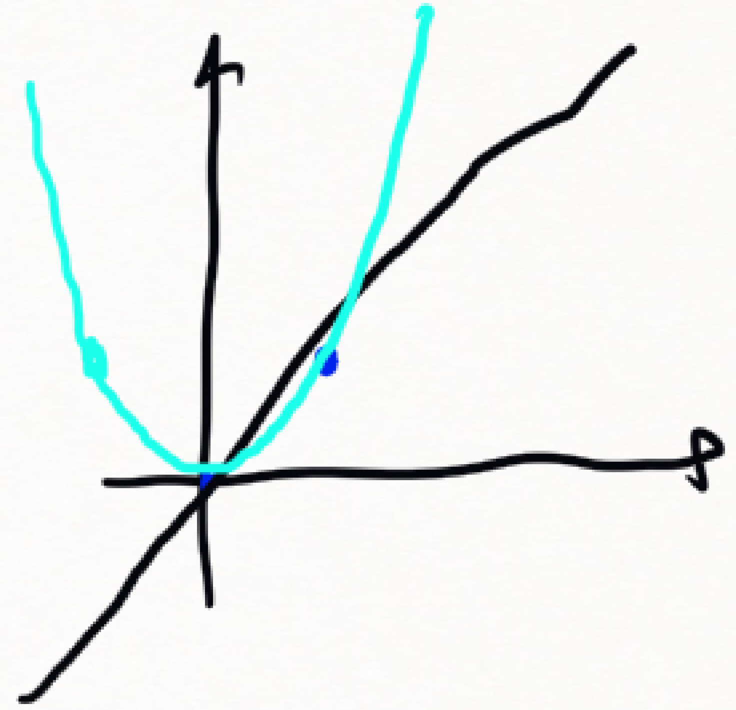
$$L_n^0(x) = \frac{\overbrace{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}^{\text{Falta } (x-x_0)}}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

$$L_n^1(x) = \frac{\overbrace{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}^{\text{Falta } (x-x_1)}}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$L_n^i(x) = \frac{\overbrace{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}^{\text{falta } (x-x_i)}}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(\overset{t}{x}-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Lbase: calcula $L_n^i(t)$

Lpol: calcula $p(t)$



④ x, y : interpolar

v : evaluar la interpolación

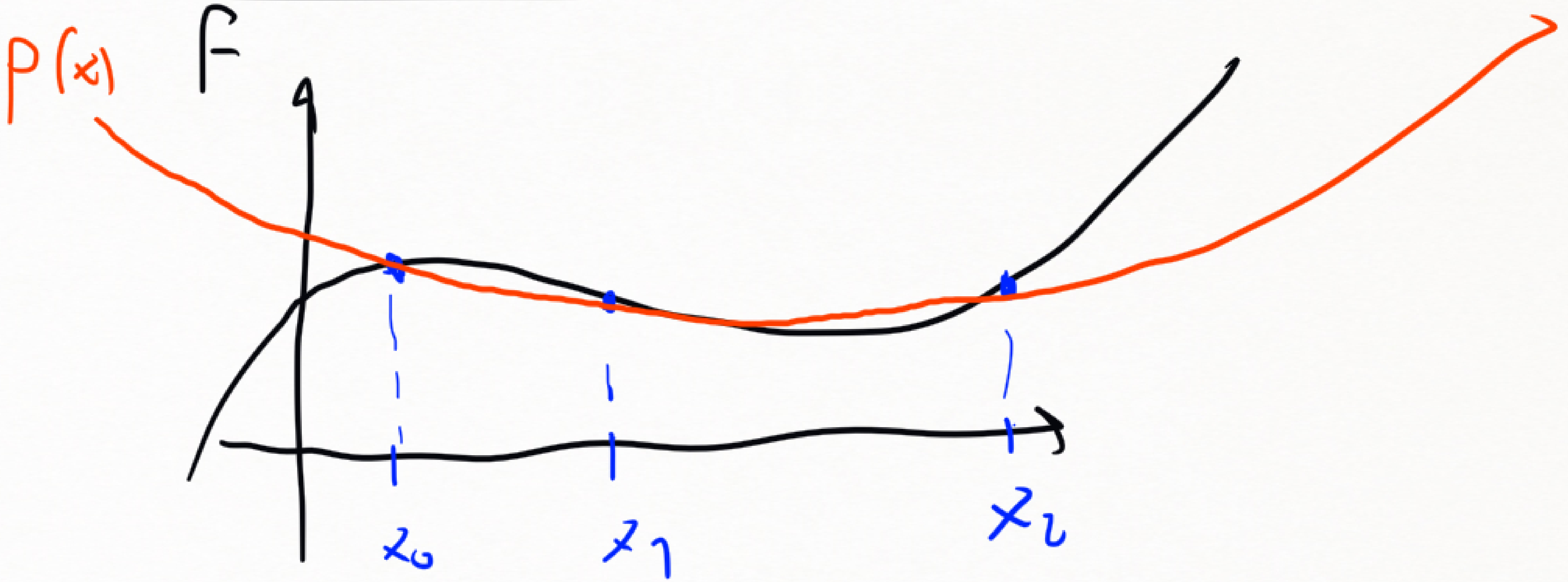
$$x, y \models\!\Rightarrow p(t) \longrightarrow v = (v_1, \ldots, v_k) \nearrow \begin{array}{l} p(v_1) \\ p(v_2) \\ \vdots \\ p(v_k) \end{array}$$

Interpolar Funciones

$x_0, x_1, \ldots, x_n$

F

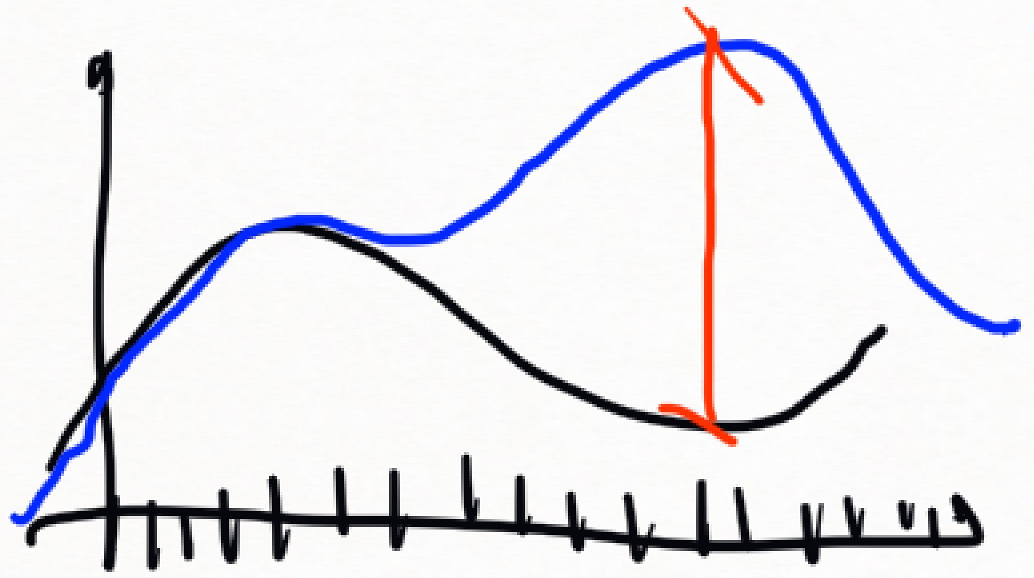
$$\models\!\Rightarrow \begin{array}{l} y_0 = F(x_0) \\ y_1 = F(x_1) \\ \vdots \\ y_n = F(x_n) \end{array}$$



$f(x)$, $p(x)$ $[a,b]$

$$\text{error} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-p(x)| = \|f-p\|_{L^\infty([a,b])}$$

en todo el dominio, vemos lo máximo que le erra.



Una aproximación es hacer una grilla fina de $[a,b]$

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n} \qquad x_0=a,\ x_1, \dots, x_n=b$$

y usamos $\max_{i=0,\dots,n} |f(x_i)-p(x_i)|$