

Corrección Householder

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow H_1 A = \begin{pmatrix} -2 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \\ 0 & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sigue análogo}}$$

$$x = (1, 1, 1, 1)$$

$$y = (2, 0, 0, 0)$$

$$H \text{ tq } Hx = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} y$$

Mismo signo

$$u = x \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} y$$

en este caso $u = x + y$

$$\hookrightarrow Hx = -y$$

Esto es la alternativa que evita cancelaciones.

$$u = x + y \rightarrow Hx = -y$$

$$u = x - y \rightarrow Hx = y$$

$$u = x + y = (1+2, 1, 1, 1)$$

Mismo signo

⑧

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T A x = A^T y$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1+\delta^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\delta^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\delta^2 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{sol} = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{3+\delta^2}, \frac{1}{3+\delta^2}, \frac{1}{3+\delta^2} \right)$$

QR para PMCL

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ podemos usar esto solo si $\boxed{\text{rg}(A) = n}$.

Ya tenemos la descomposición QR de A, PMCL: minimizar $\|Ax - y\|^2$

$$\|Ax - y\|^2 = \|QRx - y\|^2 = \|Q^t(QRx - y)\|^2 = \|Q^tQRx - Q^ty\|^2 = \|Rx - b\|^2$$

$Q^{-1} = Q^t$ ortogonal
preserva norma

$$Rx - b = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

↓ el x no afecta

obtenemos x resolviendo $Rx = b_a$ (sist. cuadrado triangular superior)

$$\begin{aligned} Hb_2(A) &\rightarrow H \\ H &= Q^{-1} = Q^t \\ HA &= R \end{aligned}$$

y queda

$$Rx - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -b_4 \end{pmatrix}$$

la parte que si podemos
afectar, la hacemos 0.

solución óptima (minimiza la
norma)

no podemos hacer nada

Descomposición SVD

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \quad (m \geq n)$$

$$\text{rg}(A) = r \leq n$$

($\text{rg}(A)$ puede ser $< n$)

$$U \in M_{m \times m}(\mathbb{R}) \text{ ortogonal}$$

$$S \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \text{ valores sing.}$$

$$V \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ ortogonal}$$

$$A = U S V^T$$

$$\sigma_i \in \mathbb{R} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

y si $r < n$, 0 también es valor singular.

$$r = n$$

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$r < n$$

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|Ax - y\|^2 = \|USV^T x - y\|^2 \stackrel{\text{ortogonal}}{=} \|SV^T x - U^T y\|^2$$

$$= \| \underbrace{SV^T x}_z - \underbrace{U^T y}_b \|^2 = \|Sz - b\|^2$$

nueva incógnita $\rightarrow z$

$$Sz - b = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ b_{r+1} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Con $Sr(z_1, \dots, z_r) = b_r$ determinamos los primeros r entradas de z .

Las otras $n-r$ entradas (en caso de que $r < n$) no afectan el resultado.

Valgan lo que valgan, no cambia $Sz - b \Rightarrow$ hay infinitas soluciones.

En general las hacemos 0, lo cual minimiza la norma de z (entre las soluciones).

$$Sz - b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -b_{r+1} \\ \vdots \\ -b_m \end{pmatrix}$$

primeros r que los anulamos

los que no podemos afectar.

\Rightarrow minimizar la norma.

minimizar $\|x\|$

Deshacemos el CV

$$x = Vz \quad (V^T = V^T)$$

$$\left(\mu^1 \mid \mu^2 \mid \dots \mid \mu^m \right) \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ 0 & - & - & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{v^1}} \\ \frac{1}{\sqrt{v^2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{v^n}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_1 \underbrace{\mu^1 v_1^t}_{\text{rg}=1} + \sigma_2 \underbrace{\mu^2 v_2^t}_{\text{rg}=1} + \dots + \sigma_n \underbrace{\mu^n v_n^t}_{\text{rg}=1}$$

Ranko 1

rg2

tomar los primeros i valores sing.
da la mejor aproximación de rango i