

## Order $O()$ (Examples)

can  $x \approx 0$   $3x^2 - 5x^5 = O(x^2)$

$$\begin{aligned} g(x) &= (x + O(x^2))^2 = x^2 + \overbrace{2 \times O(x^2)}^{O(x^3)} + \overbrace{(O(x^2))^2}^{O(x^4)} \\ &= x^2 + O(x^3) + O(x^4) = x^2 + O(x^3) \end{aligned}$$

$$O(g(x)) = O(\underline{x^2} + O(x^3)) = \underline{O(x^2)} + O(x^3) = O(x^2)$$



$$Ax = b \quad \begin{matrix} A & m \times n \\ b & \mathbb{R}^m \end{matrix} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{con } m \geq n$$

(en general  $m > n$  y sist. incompatible)

$$r := Ax - b \quad x \text{ sol} \Leftrightarrow r = \vec{0}$$

como no hay un  $x$  tq  $r = \vec{0}$ , tratamos de hacerlo lo más chico posible

$$x \text{ sol. PMCL} \Leftrightarrow x \text{ minimiza } \|Ax - b\|$$

② ← no cambia el resultado  
puede estar o no.  
② ← euclídeo

Ecs. normales:  $A^T A x = A^T b$   $\begin{matrix} n \times n & \mathbb{R}^n \end{matrix}$  siempre es compatible (det. o indet.)  
pero  $A^T A$  puede estar mal condicionada

Formas de  
resolverlo  
(hallar  $x$  que)  
minimiza

Desc. QR: solo se puede usar si  $\text{rg}(A) = n$

Desc. SVD: siempre funciona

$A$  es  $m \times n$ , con  $m \geq n$ ,

$$\text{rg}(A) \leq n$$

rango  
deficiente

$\text{rg}(A) = n$  (PMCL única solución)

$\text{rg}(A) < n$  (PMCL  $\infty$  sols)



## Desc. QR

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  con  $m \geq n$  y  $\text{rg}(A) = n$

$\Rightarrow \exists Q \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$  ortogonal  
 $\exists R \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  triang. superior con  
diagonal sin 0.

tg  $A = QR$   
 $n$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & r_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\neq 0$  } bloque  $n \times n$   
triang. sup.  
} bloque  $(m-n) \times n$   
de ceros

## Matrices ortogonales

1)  $Q^{-1} = Q^t$

2) las columnas conforman una base ortonormal  
de  $\mathbb{R}^m$  (pi usual)

3)  $\forall v \in \mathbb{R}^m \quad \|Qv\|_2 = \|v\|_2$

4)  $Q$  ortogonal  $\Rightarrow Q^{-1} = Q^t$  también lo es.

5)  $Q_1, Q_2$  ortogonales

$\Rightarrow Q_1 Q_2$  también lo es.

QR  $\begin{cases} \nearrow \text{Cómo hallar. Reflexiones de Householder.} \\ \searrow \text{Cómo usarla para PMCL} \end{cases}$

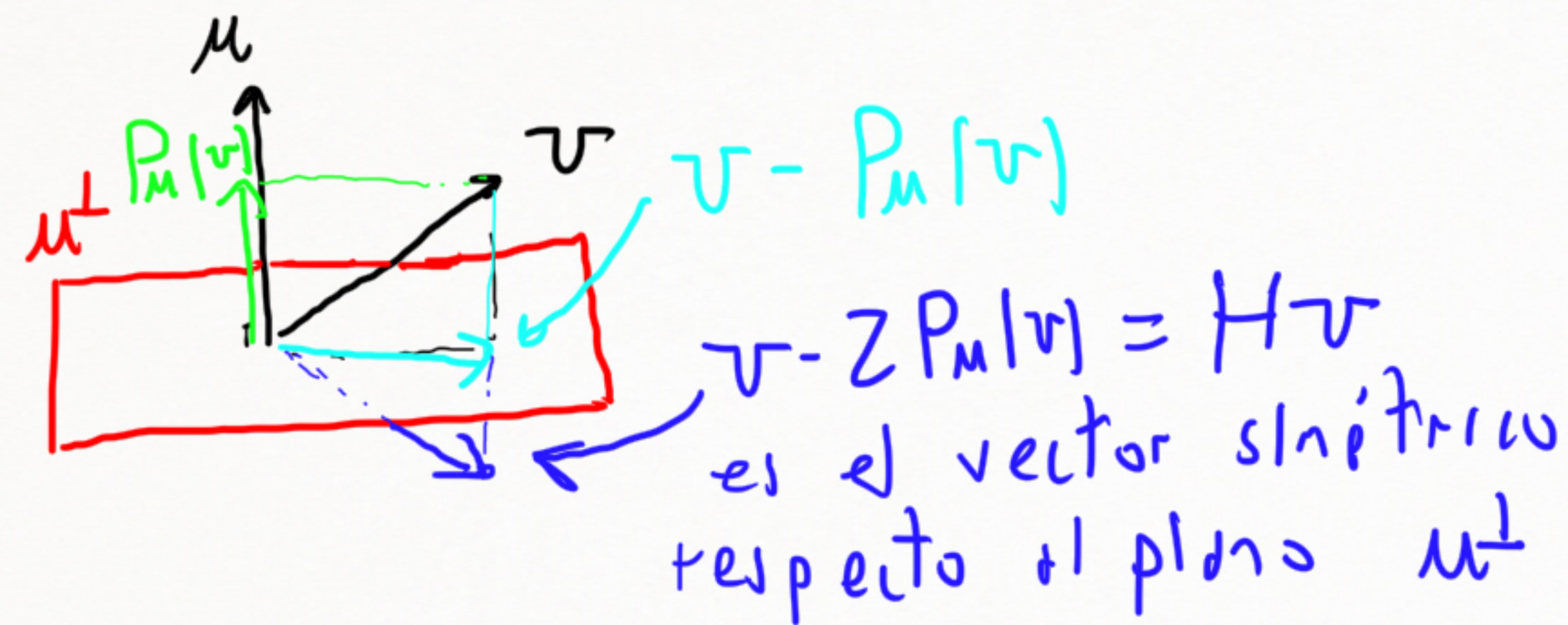


# ortogonales Refl. Householder

Son ciertas matrices  $H$  que se definen a partir de vectores  $u \neq 0$ .

$$H := I_d - \frac{2}{\|u\|_2^2} u u^T \quad \left. \begin{array}{l} u u^T = u \left( \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right)^T \end{array} \right\}$$

$Hv = v - 2P_u(v) = v$  reflejado respecto al plano  $u^\perp$ .  
( $u^T v = \langle u, v \rangle$ )



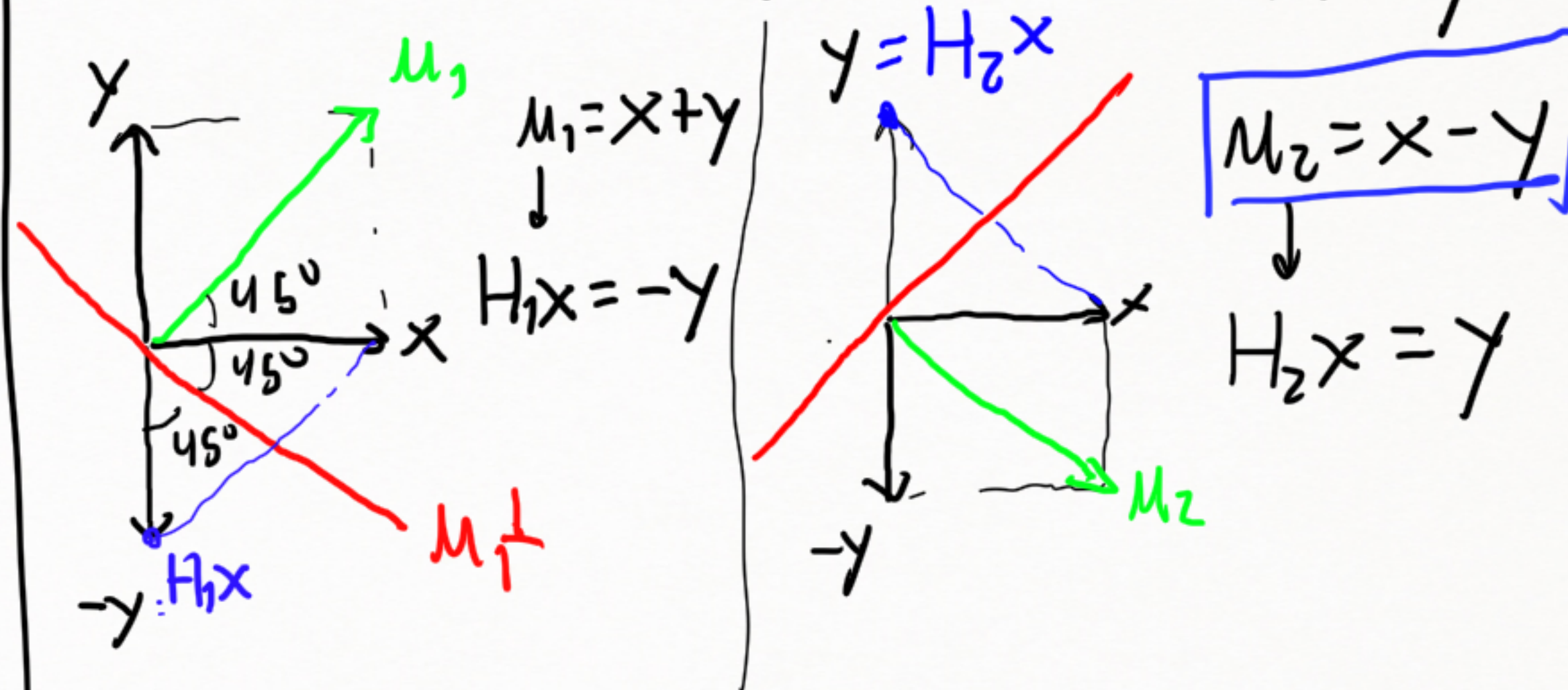
④  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

queremos  $H$  de Householder tq  $Hx = y$ .

(para que exista es importante que  $\|x\|_2 = \|y\|_2$ )  
es equivalente a hallar el vector  $u$ .

## Idea geométrica

Para simplificar, dibujamos como si  $x \perp y$





QR mediante Hh  $\rightarrow$  De a una columna a la vez  $A \rightarrow R$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow H_1 A = \begin{pmatrix} a & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \\ 0 & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} a & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \\ 0 & 0 & b_{43} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow H_3 H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} a & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b & b_{23} \\ 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R$$

$Q'$  ortogonal

$H_1$  de  $H_1$  tq con  $x = (1, 1, 1, 1)$

$$H_1 x = (a, 0, 0, 0)$$

$$y = (a, 0, 0, 0)$$

$$\|x\|_2 = \|y\|_2$$

$$a = \pm \|x\| \text{ mismo signo que primer entrada de } x$$

$$= \pm 2$$

$$x = (1, 1, 1, 1)$$

$$y = (2, 0, 0, 0)$$

resp. parte  $b$

C igual que  $e_j$  interior  $u = x - y \dots$

$$x = (b_{22}, b_{32}, b_{42})$$

Hallar otro transf. de Householder

$$H_2 \text{ tq } H_2' x = (b, 0, 0)$$

$$\text{con } b = \pm \|x\|$$

$H_2'$  es  $3 \times 3$ . Queremos  $H_2$  de  $4 \times 4$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & H_2' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$x = (b_{33}, b_{43})$$

$$H_3 \text{ tq } H_3' x = (r, 0) \quad H_3 \text{ es } 2 \times 2$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{H_3'} & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

cacha de Id que hace que no afecte la primera columna

$$Q'A = R$$

$$\Rightarrow A = QR$$

$$\text{con } Q = [q_i] = [q_i]^\top$$



$$\text{NR} \quad F(x) = x^2 \quad F'(x) = 2x$$

$$x^{k+1} = x^k - \frac{F(x^k)}{F'(x^k)} = x^k - \frac{(x^k)^2}{2x^k} = \frac{x^k}{2}$$

$$\Rightarrow x^k = e^k \quad \Rightarrow e^{k+1} = \frac{e^k}{2} \quad \Rightarrow p=1 \quad \beta=2$$

$$e^k = x^k - \underset{0}{x^*}$$

$$\frac{|e^{k+1}|}{|e^k|^1} = 2$$