Queremos hallar x^* tq $F(x^*) = 0$.

MIG: tenemos g tq $F(x)=0 \iff g(x)=x$

y definimos una sucesión $\{x^k\}$ $\quad x^{k+1} = g(x^k)$ (x^0 se define de alguna forma)

e idealmente $x^k \xrightarrow{k\to\infty} x^*$.

Convergencia $x^k \xrightarrow{k\to\infty} x^*$ puede ser un poco sutil.

Orden y velocidad (qué tan rápido converge)

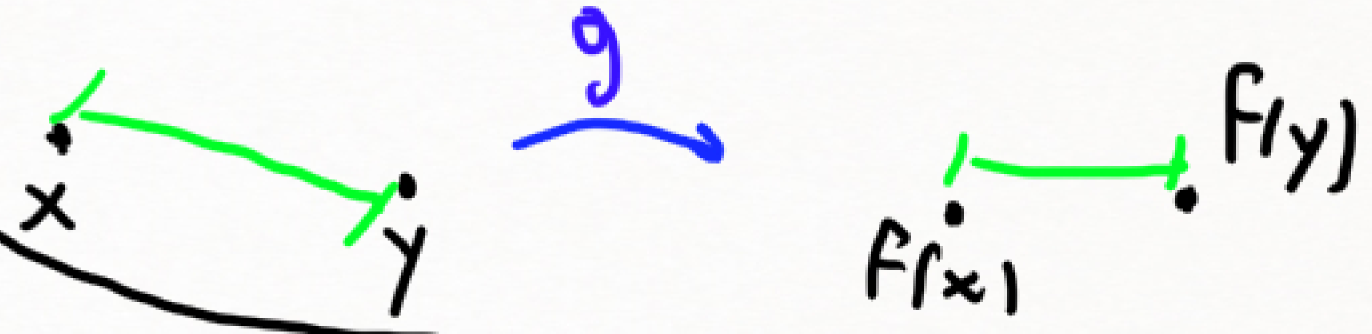
Teorema 4.7.4

• Ejemplo: NR si $F'(x^*) \neq 0$

$$g(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

Convergencia

Def: $g: I \to I$ es contractiva $\Longleftrightarrow$ $\exists m \in [0,1)\ \forall x,y \in I\ \ |g(x)-g(y)| \le m\,|x-y|$



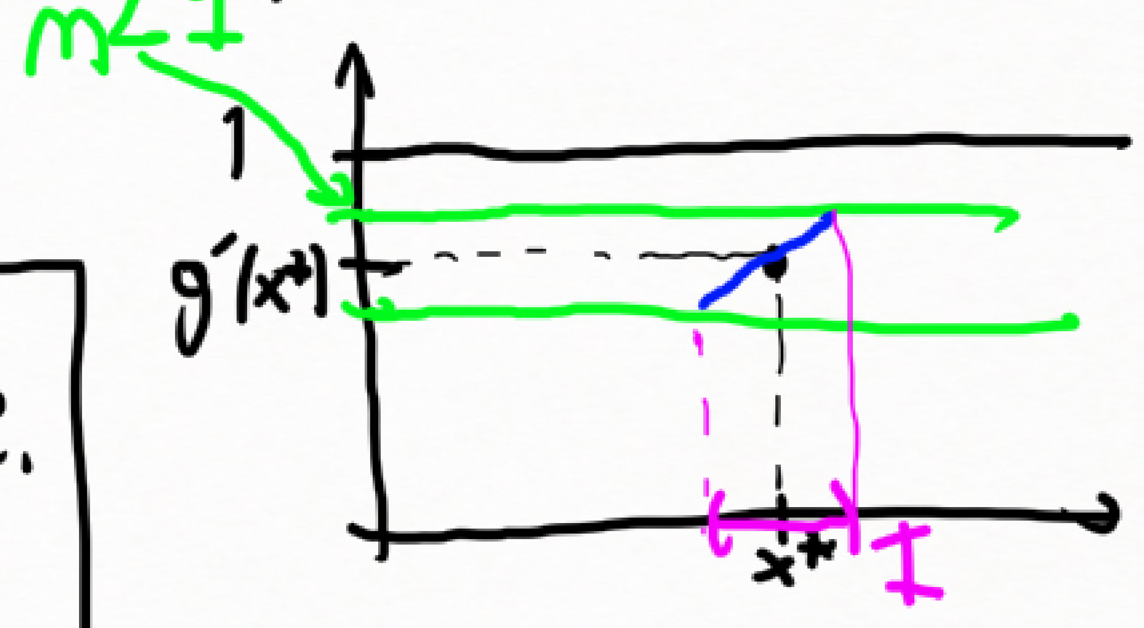
Teo: si $g: I \to I$ es contractiva e I es un intervalo cerrado (para asegurar $x^* \in I$) $\Longrightarrow$ $\exists!\, x^* \in I$ tq $g(x^*) = x^*$ y $\forall x^0 \in I$, $x^k \xrightarrow{k\to\infty} x^*$ $\left(x^{k+1} = g(x^k)\right)$

Coro: x^* tq $g(x^*) = x^*$, I intervalo tq $x^* \in I$ y $\exists m \in [0,1)\ \forall x \in I\ \ |g'(x)| \le m$

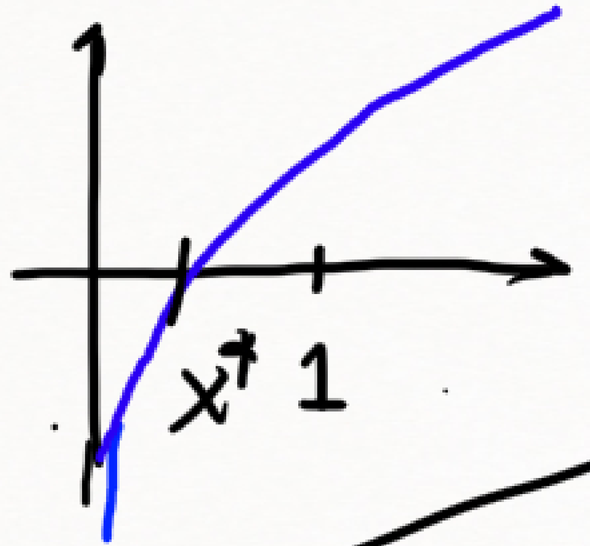
$\Longrightarrow$ Se aplica el teorema y tenemos que si $x^0 \in I$, el MIG converge.

- Si $|g'(x^*)| < 1$ y además g es C^1 (g' continua), entonces existe un intervalo I con $x^0 \in I$ tq si $x^0 \in I$, el MIG converge.

- Si $|g'(x^*)| > 1$ y g es C^1, entonces no converge.



8 $x + \log(x) = 0$. Sea x^* la solución.



$0 < x^* < 1$

1- $x^{k+1} = -\log(x^k)$ $\qquad g(x) = -\log(x)$

$\left(g(x^*) = x^* \iff x^* = -\log(x^*) \iff x^* + \log(x^*) = 0\right)$

Veamos si converge: ¿$|g'(x^*)|$? $\qquad g'(x) = \frac{-1}{x} \Rightarrow |g'(x)| = \frac{1}{|x|}$

como $0 < x^* < 1$, $\frac{1}{|x^*|} > 1 \Rightarrow |g'(x^*)| > 1 \Rightarrow$ no converge

2- $x^{k+1} = e^{-x^k}$ $\qquad g(x) = e^{-x}$ $\qquad$ ¿$|g'(x^*)|$?

$|g'(x)| = e^{-x}$ $\rightarrow$ $|g'(x^*)| < 1 \Rightarrow$ existe un intervalo tq si x^0 pertenece, el MIG converge.

$0 < x^*$

3- $x^{k+1} = \frac{x^k + e^{-x^k}}{2}$

$g(x) = \frac{x + e^{-x}}{2}$

$x = g(x) \iff x = \frac{x + e^{-x}}{2}$

$\iff \frac{x}{2} = \frac{e^{-x}}{2} \iff x = e^{-x}$

$\iff \log(x) = -x$ ✓

$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$

$0 < x^* \Rightarrow 0 < \frac{e^{-x^*}}{2} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 < g'(x^*) < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |g'(x^*)| < 1$

- Orden de convergencia: p
- Velocidad de convergencia: β.

1) Mayor p. 2) Menor β.

Teo:

- El orden p es el menor grado de derivada que no se anula en x^*.
- La velocidad de convergencia es $\beta = \frac{|g^{(p)}(x^*)|}{k!}$

Método 2 $\quad |g'(x^*)| = e^{-x^*} \neq 0 \Rightarrow p=1 \quad \beta = e^{-x^*}$

$$\boxed{\frac{1}{2} - \frac{e^{-x^*}}{2} < e^{-x^*} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{3e^{-x^*}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < e^{-x^*}}$$

$\Leftrightarrow$

$-\log(3) < -x^*$

$\Leftrightarrow x^* < \log(3)$ ✓

Método 3 $\quad |g'(x^*)| = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x^*}}{2} \neq 0 \Rightarrow p=1 \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x^*}}{2}$

11 $\quad x^{k+1} = x^k + a(x^k - F(x^k))$

α sol de

$\alpha = F(\alpha)$.

a) $g(x) = x + a(x - F(x))$

$g'(x) = 1 + a(1 - F'(x)) \Rightarrow g'(\alpha) = 1 + a(1 - F'(\alpha))$

Lo primero que queremos es $g'(\alpha) = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{F'(\alpha) - 1}}$

b) $F(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow x = F(x) \quad x = \pm\sqrt{2}$. Queremos $\alpha = \sqrt{2}$.

$F'(x) = \frac{-2}{x^2} \Rightarrow F'(\alpha) = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow g(x) = x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{x}\right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \qquad \boxed{g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}}$

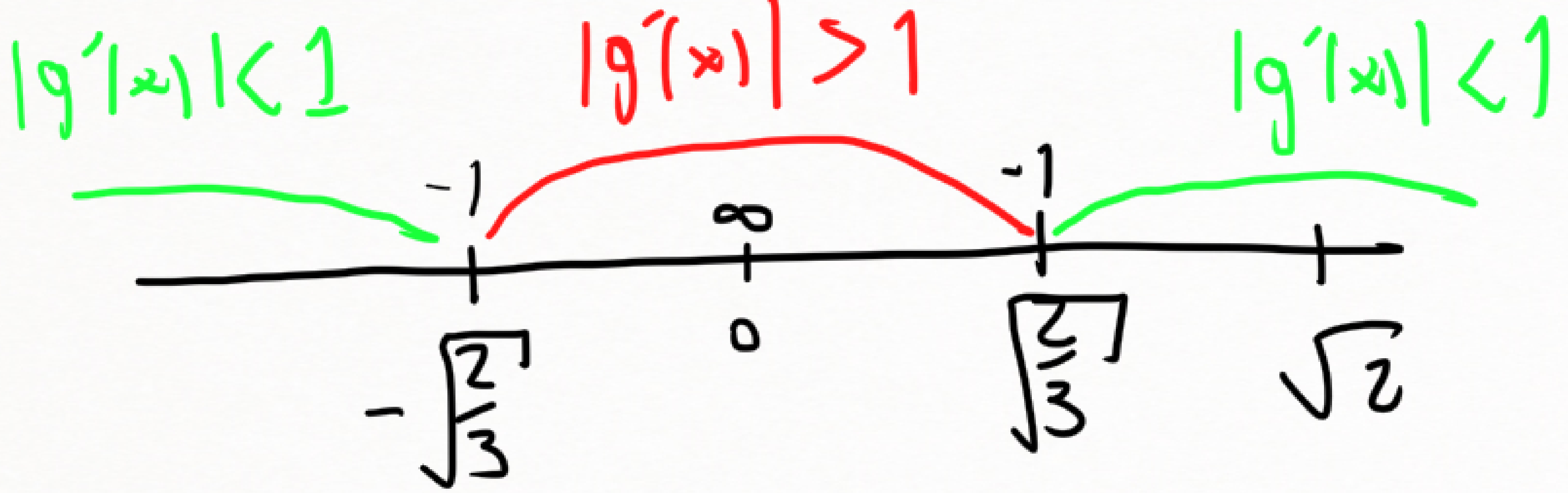
$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \qquad g'(\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow$ converge si empezamos cerca. Pero acá queremos saber exactamente dónde podemos empezar.

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$



$$I = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$$