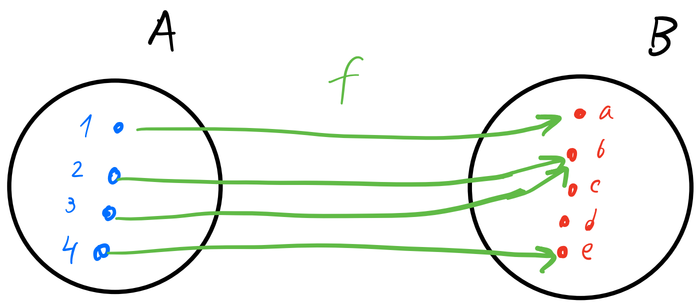
TERMINOLOGÍA



$f : A \to B$

$f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = b$, $f(4) = e$

" a es la imagen de 1 por la función f "

" 1 es una pre-imagen de a por f "

El conjunto imagen

$f : A \to B$

$Im(f) = \{ x \in B : x = f(a) \text{ para algún } a \in A \}$

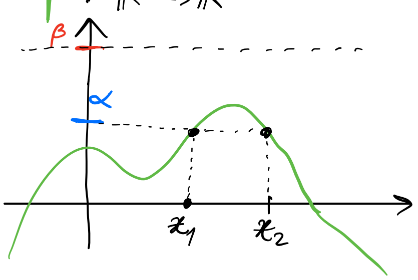
En el ejemplo anterior:

$Im(f) = \{a, b, e\}$

Otras maneras de definir la imagen:

* $Im(f) = \{ f(x) : x \in A \}$
* $Im(f) = \{ y \in B : \exists x \in A \text{ tal que } y = f(x) \}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$f(x_1) = \alpha$

$f(x_2) = \alpha$

¿Cómo sabemos, mirando el gráfico si un $\alpha \in \mathbb{R}$ dado pertenece a $Im(f)$?

Tenemos que ver si la recta horizontal a altura α interseca al gráfico de f.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 + 3x - 1$

¿cómo sabemos, sin graficar, si $\alpha \in \mathbb{R}$ dado está en la imagen de f?

$f(x) = \alpha$

$x^2 + 3x - 1 = \alpha$

$x^2 + 3x - (1+\alpha) = 0$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 1 \cdot (1+\alpha)}}{2}$$

Entonces, la ecuación tiene solución sii $\boxed{13 + 4\alpha \geq 0}$

$13 + 4\alpha \geq 0 \iff 4\alpha \geq -13$

$\iff \alpha \geq \frac{-13}{4}$

$$Im(f) = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \geq \frac{-13}{4} \right\}$$

NUEVAS FUNCIONES A PARTIR DE FUNCIONES VIEJAS

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 3x + 1$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = x^2$

Podemos construir:

$(f+g): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

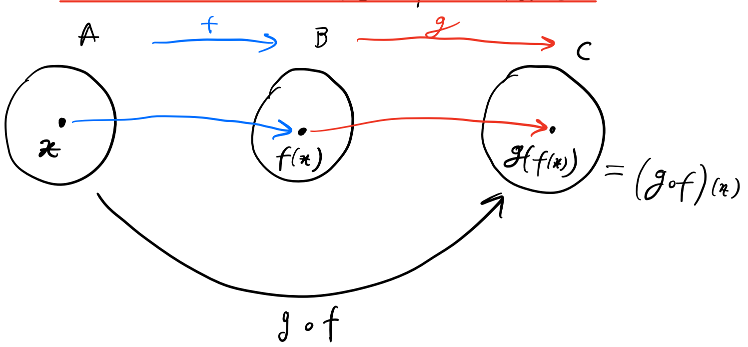
$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (3x+1) + x^2 = x^2 + 3x + 1$

$(f.g)(x) = f(x) . g(x) = (3x+1) . x^2 = 3x^3 + x^2$

$\left(f/g\right) : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$f/g\,(x) = f(x) / g(x) = \frac{3x+1}{x^2}$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES



$f: A \to B$

$g: B \to C$

En el ejemplo anterior:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+1) = (3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

$h : \mathbb{R} \setminus \{-3/2\} \longrightarrow \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$h(x) = \dfrac{1}{2x+3}$; $g(x) = x^2$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}\setminus\{-3/2\} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$$

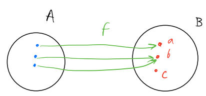
Para definir $h\circ g$ lo que precisamos es que

$$\underbrace{Im(g)}_{\{x\in\mathbb{R} :\, x\geq 0\}} \subseteq \underbrace{Dominio(h)}_{\{x\in\mathbb{R} :\, x\neq -3/2\}}$$

$$\{x\in\mathbb{R} : x\geq 0\} \subseteq \{x\in\mathbb{R} : x\neq -3/2\}$$

Funciones inyectivas y sobreyectivas

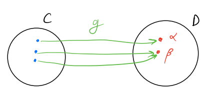
$f : A \longrightarrow B$ función



$c\in B$ pero $c\notin Im(f)$

$B\neq Im(f)$

$g : C \longrightarrow D$



$D = Im(g)$

- Decimos que f es sobreyectiva si todo elemento de B es imagen de algún elemento del dominio

Otras formas de escribirlo:

- $f : A \to B$ es sobreyectiva si $Im(f) = B$

- $f : A \to B$ es sobreyectiva si todo elemento de B tiene al menos una preimagen

- $f : A \to B$ es sobreyectiva si

$$\forall\, b\in B,\ \exists\, a\in A \ /\ f(a) = b$$

"Para Todo" "Existe" "tal que"

Observación:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 + 1$

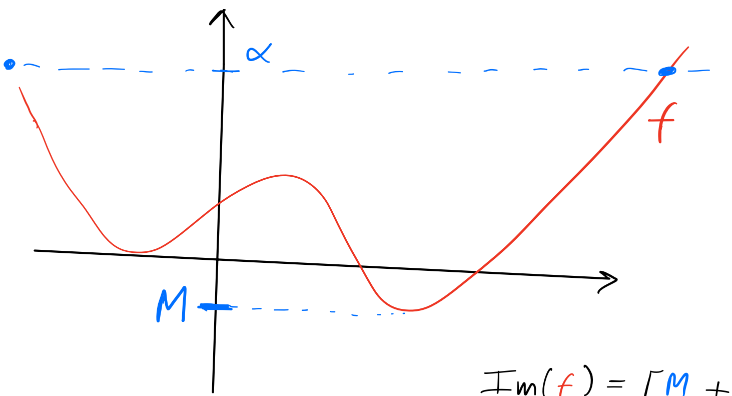
NO es sobreyectiva

$$\left.\begin{array}{l} Im(f) = [1, +\infty) \\ \text{Codominio}(f) = \mathbb{R} \end{array}\right\}$$ como no son iguales f no es sobreyectiva

Pero, si restringimos el codominio:

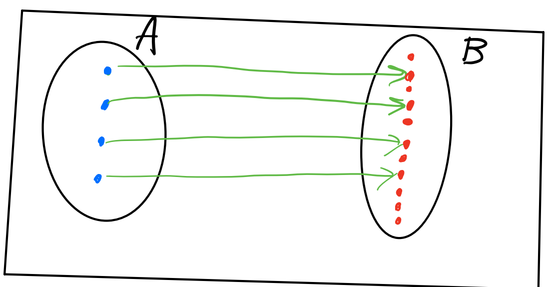
$f: \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty)$; $f(x) = x^2 + 1$

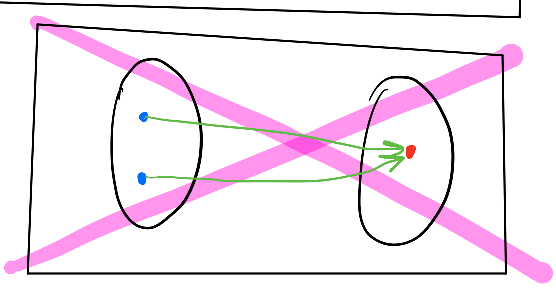
ahora sí es sobreyectiva.



$Im(f) = [M, +\infty)$

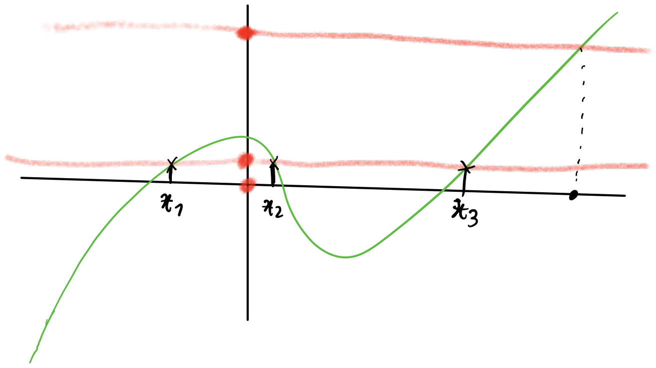
$f: A \longrightarrow B$ es inyectiva si elementos distintos de A tienen imágenes distintas por f





Otras definiciones: (equivalentes)

- $f: A \rightarrow B$ es inyectiva si todo elemento del codominio tiene a lo sumo una preimagen



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f es sobreyectiva

f NO es inyectiva

- $f: A \to B$ es inyectiva si $\forall x, y \in A$ tales que $x \neq y$, se tiene que $f(x) \neq f(y)$
- $f: A \to B$ es inyectiva si: $\boxed{f(x) = f(y) \Rightarrow x = y}$

ContraRecíproco

$C \Rightarrow D \rightsquigarrow$ NO $D \Rightarrow$ NO C