Teorema fundamental de la aritmética

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, entonces

① existen primos $p_1, p_2, \dots, p_k$ (no necesariamente distintos) tales que

$$n = p_1 \, p_2 \, p_3 \cdots p_k$$

② la descomposición es única: k es único y la lista de primos (con repeticiones) es única

Ejercicio 1

$c = 15!$

a) descomposición en primos

$$c = 15! = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$
$$= 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2$$
$$= 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$$

$a = 1485000 = 1485 \cdot 1000$

$$\begin{cases} 1000 = 10^3 = (2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3 \\ 1485 = 3 \cdot 495 = 3 \cdot 3 \cdot 165 \\ \quad = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 55 \\ \quad = 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \end{cases}$$

$$a = 1485000 = 1485 \cdot 1000$$
$$= 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2^3 \cdot 5^3$$
$$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 11$$

* cantidad de divisores positivos de a?

sea n un divisor de a

la descomposición en factores primos de n es de la forma

$$n = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \cdot 11^{\delta}$$

4 pos. 4 pos 5 pos 2 pos.

con
$$\begin{cases} 0 \le \alpha \le 3 \\ 0 \le \beta \le 3 \end{cases}$$

$n = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 11^1$ $\qquad \begin{cases} 0 \leq \gamma \leq 4 \\ 0 \leq \delta \leq 1 \end{cases}$

entonces la cantidad de divisores positivos de a es $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2$

en general si $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$

la cantidad de divisores positivos de a es: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$

* $a = 2^{\overset{\text{impar}}{3}} \cdot 3^{\overset{\text{impar}}{3}} \cdot 5^4 \cdot 11^{\overset{\text{impar}}{1}}$

¿ a es un cuadrado perfecto?

buscamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m^2 = a$

→ supongamos que existe m tal que $m^2 = a$

$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$

$m^2 = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k})^2 = (p_1^{\alpha_1})^2 (p_2^{\alpha_2})^2 \cdots (p_k^{\alpha_k})^2 = \underbrace{p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k}}_{\text{los exponentes de la descomposición en primos de } m^2 \text{ son pares}}$

→ recíprocamente si a verifica que todos los exponentes de su descomposición en factores primos son pares entonces a es cuadrado perfecto

$a = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k} = (\underbrace{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}}_{m})^2$

$\Rightarrow a = m^2$ es cuadrado perfecto

<u>En conclusión</u>: a es cuadrado perfecto si y solo si todos los exponentes de su descomposición son pares.

Ejercicio 3. Decidir si existen enteros positivos a y b que satisfagan:

a. $a^2 = 8b^2$. **b**. $a^2 = 3b^3$. **c**. $7a^2 = 11b^2$.

a) buscamos enteros positivos a y b tales que

$$a^2 = 8b^2$$

$n = a^2 = 8b^2$

$*$ $n = 8b^2$

la descomposición en primos de n es de la forma

$$n = 2^{3+\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad \text{con} \begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \alpha_i \geq 1 \end{cases} \qquad p_i \neq 2$$

$$8b^2 = 2^{3+\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = \underbrace{2^3}_{8} \cdot \underbrace{2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}}_{b^2}$$

$$\Rightarrow b^2 = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ es par} \\ \alpha_i \text{ es par} \end{cases}$$

$*$ $n = a^2$

entonces la descomposición en primos de a es

$$a^2 = 2^{3+\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+\alpha \text{ es par} \Rightarrow \alpha \text{ es impar} \\ \alpha_i \text{ es par} \end{cases}$$

absurdo!

No existen a y b que verifiquen $a^2 = 8b^2$

$$\underset{2^{par}}{a^2} = \underset{\underbrace{2^3 \; 2^{par}}_{2^{impar}}}{8b^2}$$

c. $7a^2 = 11b^2$.

$n = 7a^2 = 11b^2$

$n = 7a^2 \Rightarrow 7 \mid n$

$n = 11b^2 \Rightarrow 11 \mid n$

la descomposición en primos de n tiene la forma

$$n = 7^{\alpha} \cdot 11^{\beta} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad \text{con} \begin{cases} \alpha \geq 1 \\ \beta \geq 1 \\ \alpha_i \geq 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} p_i \neq 7 \\ p_i \neq 11 \end{matrix}$$

* $n = 7a^2$

la descomposición en primos de $7a^2$ es

$$7a^2 = 7^{\alpha} \cdot 11^{\beta} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = 7 \cdot \underbrace{7^{\alpha-1} \cdot 11^{\beta} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}}_{a^2}$$

$$a^2 = 7^{\alpha-1} \cdot 11^{\beta} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 \text{ es par} \rightsquigarrow \alpha \text{ es impar} \\ \beta \text{ es par} \\ \alpha_i \text{ es par} \end{cases}$$

* $n = 11b^2$

$$\Rightarrow 11b^2 = 7^{\alpha} \cdot 11^{\beta} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = 11 \cdot \underbrace{7^{\alpha} \cdot 11^{\beta-1} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}}_{b^2}$$

$$b^2 = 7^{\alpha} \cdot 11^{\beta-1} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ es par} \leftarrow \text{absurdo!} \\ \beta - 1 \text{ es par} \\ \alpha_i \text{ es par} \end{cases}$$

$$7a^2 = 11b^2$$

$$\underbrace{7^1 \quad 7^{par}}_{7^{impar}} \qquad 7^{par}$$

Ejercicio 6. Hallar los números naturales a y b que cumplen: $\mathrm{mcd}(a,b) = 18$, a tiene 21 divisores positivos y b tiene 10 divisores positivos.

* primos que tienen que aparecer en la descomposición en primos de a y b

$$\mathrm{mcd}(a,b) = 18 = 2 \cdot 3^2$$

$$\Rightarrow a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}\, p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad \text{con} \begin{cases} \alpha \geq 1 \\ \beta \geq 2 \\ \alpha_i \geq 0 \end{cases}$$

$2 \cdot 3^2$ divide a a

$$\Rightarrow b = 2^{\gamma} \cdot 3^{\delta}\, p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k} \quad \text{con} \begin{cases} \gamma \geq 1 \\ \delta \geq 2 \\ \beta_i \geq 0 \end{cases}$$

$2 \cdot 3^2$ divide a b

+ condiciones extra para que $\mathrm{mcd}(a,b) = 2 \cdot 3^2$

* que sabemos de a?

$a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}\, p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ con $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 2$, $\alpha_i \geq 0$

a tiene 21 divisores positivos

$$\Rightarrow 21 = (\alpha+1)(\beta+1)(\alpha_1+1) \cdots (\alpha_k+1)$$

$$7 \cdot 3 = (\alpha+1)(\beta+1)(\alpha_1+1) \cdots (\alpha_k+1)$$

entonces tenemos dos posibilidades

① $\alpha+1 = 7$, $\beta+1 = 3$, $\alpha_i + 1 = 1$

$$\Rightarrow \alpha = 6, \ \beta = 2, \ \alpha_i = 0$$

$$\boxed{a = 2^6 \cdot 3^2}$$

② $\alpha+1=3$, $\beta+1=7$, $\alpha_i+1=1$

$\Rightarrow \alpha=2$, $\beta=6$, $\alpha_i=0$

$$\boxed{a=2^2\cdot 3^6}$$

* que sabemos de b?

$$b=2^{\gamma}\cdot 3^{\delta}\, p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k} \quad \text{con } \gamma\geq 1,\ \delta\geq 2,\ \beta_i\geq 0$$

como b tiene 10 divisores:

$$10=(\gamma+1)(\delta+1)(\beta_1+1)\cdots(\beta_k+1)$$

$$5\cdot 2=(\gamma+1)(\delta+1)(\beta_1+1)\cdots(\beta_k+1)$$

tenemos dos posibilidades:

① $\gamma+1=5$, $\delta+1=2$, $\beta_i+1=1$

$\Rightarrow \gamma=4$, $\boxed{\delta=1}$, $\beta_i=0$

absurdo

② $\gamma+1=2$, $\delta+1=5$, $\beta_i+1=1$

$\Rightarrow \gamma=1$, $\delta=4$, $\beta_i=0$

$$\boxed{b=2\cdot 3^4}$$

Posibilidades para a

$a=2^6\cdot 3^2$

$a=2^2\cdot 3^6$

Posibilidad para b

$b=2\cdot 3^4$

$\rightarrow$ si $a=2^6\cdot 3^2$ y $b=2\cdot 3^4$

$\Rightarrow mcd(a,b)=2\cdot 3^2$ ✓

$\rightarrow$ si $a=2^2\cdot 3^6$ y $b=2\cdot 3^4$

$\rightarrow mcd(a,b)=2\cdot 3^4$ ✗

$n \leq 1000$

n tiene exactamente 3 divisores positivos

$$n = p_1^{\alpha_1} \, p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$3 = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdots (\alpha_k+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 3 \rightsquigarrow \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 + 1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_k + 1 = 0 \end{cases}$$

$$n = p_1^2$$