Ejercicio 3. La edad de Juan hace diez años, más la de Fátima hace diez años, suman un cuarto de la edad actual de Juan. ¿Qué edades, en años, tienen actualmente Juan y Fátima? (asuma que ambos tienen al menos diez años actualmente).

x = edad de Juan actual $\quad x \geq 10$

y = edad de Fátima actual $\quad y \geq 10$

$$(x-10)+(y-10) = \frac{1}{4}x$$

$$4(x-10)+4(y-10) = x$$

$$4x - 40 + 4y - 40 = x$$

$$\boxed{3x + 4y = 80}$$

lo usamos al final

$x \geq 10,\ y \geq 10$

① $mcd(3,4) = 1 \Rightarrow mcd(3,4) \mid 80$

$\Rightarrow$ existen soluciones

② buscamos una solución particular

a ojo:

$3 \cdot 0 + 4 \cdot 20 = 80$ ✓

$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 20 \end{array}\right\}$ solución particular

$3 \cdot 20 + 4 \cdot 5 = 80$ ✓

$\left.\begin{array}{l} x_0 = 20 \\ y_0 = 5 \end{array}\right\}$ solución particular

con Bezout

Algoritmo de Euclides con 3 y 4:

$4 = 3 \cdot 1 + 1$

$1 = 4 - 3 \cdot 1$

$3(-1) + 4 \cdot 1 = 1$

$\times 80$

$3(-80) + 4 \cdot 80 = 80$

$\left.\begin{array}{l} x_0 = -80 \\ y_0 = 80 \end{array}\right\}$ solución particular

③ escribimos el conjunto de soluciones:

$$3\left(0 + \frac{4k}{1}\right) + 4\left(20 - \frac{3k}{1}\right) = 80$$

$$S = \{(4k, 20-3k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

(4) buscamos las soluciones con $x \geq 10$, $y \geq 10$

$x \geq 10 \Rightarrow 4k \geq 10 \Rightarrow k \geq \frac{10}{4} = 2,5$ $\quad k \geq 3$

$y \geq 10 \Rightarrow 20 - 3k \geq 10 \Rightarrow 10 \geq 3k \Rightarrow \frac{10}{3} \geq k$ $\quad 3 \geq k$

3,33....

entonces $k = 3$

$x = 4 \cdot 3 = 12$

$y = 20 - 3 \cdot 3 = 11$

Existencia de soluciones no negativas

$a, b \in \mathbb{Z}$

$a > 1$, $b > 1$

$\boxed{a \text{ y } b \text{ coprimos}}$ ←

* $ax + by = ab - a - b$ no tiene soluciones enteras no negativas
* $ax + by = n$ con $n \geq ab - a - b + 1$ tiene soluciones enteras no negativas

$ax + by = c$

→ si $c < ab - a - b$ puede tener o no soluciones enteras no negativas

→ si $c = ab - a - b$ no existen soluciones enteras no negativas

→ si $c > ab - a - b$ existen soluciones enteras no negativas

Ejercicio 9. Tenemos tickets de alimentación de 200 pesos y de 70 pesos, y en una tienda venden todos los productos a 10 pesos. Probar que, si nuestra compra supera los 113 productos, no tendremos inconveniente para pagar con tickets.

n = cantidad de productos que compramos

x = cantidad de tickets de 200 que usamos

y = cantidad de tickets de 70 que usamos

total a pagar es $10n$

$200x + 70y = 10n \leftarrow$ no podemos aplicar el teorema de existencia de soluciones no negativas

$mcd(200,70) = 10$

$200x + 70y = 10n$

$\iff 20x + 7y = n$

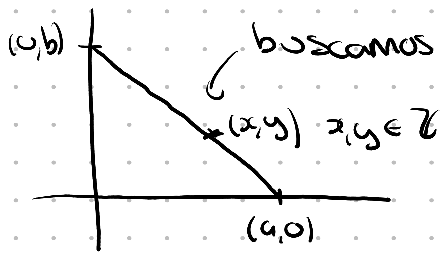
como $mcd(20,7) = 1$ entonces por el teorema de existencia de soluciones no negativas tenemos que si $n \geq \underbrace{20 \cdot 7 - 20 - 7 + 1}_{114}$ entonces podemos asegurar que existen soluciones enteras no negativas

Ejercicio 8. Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Se considera el segmento del plano cartesiano que tiene por extremos a los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$.

a. ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras hay en dicho segmento?

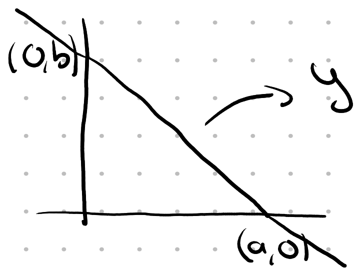
b. Usando lo anterior, calcule la cantidad de puntos cuando $a = 12$ y $b = 20$.

$a, b \in \mathbb{N}$



buscamos la cantidad de puntos con coordenadas enteras en este segmento

vamos a buscar los puntos de coordenadas enteras que están en la recta que pasa por $(a,0)$ y $(0,b)$



$y = -\frac{b}{a}x + b \iff ay = -bx + ab$

$\iff bx + ay = ab$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - b}{a - 0} = -\frac{b}{a}$

$\underbrace{bx + ay = ab}$

los puntos de coordenas enteras en la recta

$$\boxed{bx + ay = ab}$$ $(x,y) \in$ la recta

① $\text{mcd}(a,b) \mid ab$ ✓

② buscamos una solución particular

$$b \cdot 0 + a \cdot b = ab$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = b \end{array}\right\} \text{solución particular}$$

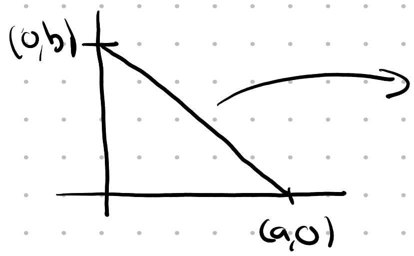
③ escribimos el conjunto de soluciones

$$b\left(0 + \frac{a}{\text{mcd}(a,b)} k\right) + a\left(b - \frac{b}{\text{mcd}(a,b)} k\right) = ab$$

los puntos de la recta que tienen coordenas enteras son

$$\left(\frac{a}{\text{mcd}(a,b)} k \, , \, b - \frac{b}{\text{mcd}(a,b)} k\right) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

④ ver cuales de esos puntos pertenecen al segmento



$bx + ay = ab$ con $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$

$$0 \le x \le a \Rightarrow 0 \le \frac{a}{\text{mcd}(a,b)} k \le a$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{1}{\text{mcd}(a,b)} k \le 1$$

$$\Rightarrow 0 \le k \le \text{mcd}(a,b)$$

$$0 \le y \le b \Rightarrow 0 \le b - \frac{b}{\text{mcd}(a,b)} k \le b$$

$$\Rightarrow -b \le -\frac{b}{\text{mcd}(a,b)} k \le 0$$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{\operatorname{mcd}(a,b)} k \geq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{mcd}(a,b) \geq k \geq 0$$

$\left(\frac{a}{\operatorname{mcd}(a,b)} k, \; b - \frac{b}{\operatorname{mcd}(a,b)} k \right)$ esta en el segmento si

$$\boxed{0 \leq k \leq \operatorname{mcd}(a,b)}$$

$$0 \leq k \leq 3$$

$$0, 1, 2, 3$$

entonces la cantidad de puntos con coordenadas enteras en el segmento es $\operatorname{mcd}(a,b) + 1$.