Ecuaciones diofánticas lineales

$$ax + by = c$$

x, y incógnitas

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

nos interesan las soluciones enteras

Teorema: $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \neq (0,0)$. Entonces

$$ax + by = c$$

* tiene solución sii $\operatorname{mcd}(a,b) \mid c$
* si (x_0, y_0) es una solución particular entonces

$$a\left(x_0 + \frac{bk}{\operatorname{mcd}(a,b)}\right) + b\left(y_0 - \frac{ak}{\operatorname{mcd}(a,b)}\right) = c$$

el conjunto de soluciones

$$S = \left\{ \left(x_0 + \underbrace{\frac{bk}{\operatorname{mcd}(a,b)}}_{b^*},\ y_0 - \underbrace{\frac{ak}{\operatorname{mcd}(a,b)}}_{a^*}\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Pasos para resolver una ecuación diofántica $ax + by = c$

1. chequeamos $\operatorname{mcd}(a,b) \mid c$ (si esto no pasa no hay soluciones)
2. buscamos una solución particular

$\operatorname{mcd}(a,b) = d$

* $d \mid c \Rightarrow c = dq$ para algún $q \in \mathbb{Z}$
* por Bezout tenemos

$$a\tilde{x} + b\tilde{y} = d \quad \leftarrow \text{por Algoritmo de Euclides extendido}$$

$$\big\downarrow \cdot q$$

$$a\tilde{x}q + b\tilde{y}q = dq$$

$$a\underbrace{\tilde{x}q}_{x_0} + b\underbrace{\tilde{y}q}_{y_0} = c$$

(x_0, y_0) es solución particular

3. escribir el conjunto solución

Ejercicio 2. Se desean comprar 430 dólares en cheques de viajero. Los cheques solamente vienen de 20 y de 50 dólares. ¿Cuántos cheques de cada cantidad deberán adquirirse?

x = cantidad de cheques de 20 dólares

y = cantidad de cheques de 50 dólares

→ lo miramos al final

$$20x + 50y = 430 \qquad \text{con } x, y \geq 0$$

es equivalente a

$$2x + 5y = 43$$

Vamos a resolver $2x + 5y = 43$

① $\text{mcd}(2,5) = 1 \Rightarrow \text{mcd}(2,5) \mid 43$

$\Rightarrow$ la ecuación tiene soluciones

② buscamos una solución particular

* a ojo:

$$2(-1) + 5 \cdot 9 = 43 \checkmark$$

$\left.\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ y_0 = 9 \end{array}\right\}$ es solución particular

* con Bezout:

Algoritmo de Euclides extendido con 2 y 5

$5 = 2 \cdot 2 + 1 \rightarrow 1 = 2(-2) + 5$

$$2(-2) + 5 = 1 \quad \times 43$$

$$2(-86) + 5 \cdot 43 = 43$$

$\left.\begin{array}{l} x_0 = -86 \\ y_0 = 43 \end{array}\right\}$ solución particular

③ escribimos el conjunto de soluciones a partir de la solución particular $x_0 = -1$, $y_0 = 9$

$$2(-1 \ \underset{1}{+5k}) + 5(9 \ \underset{1}{-2k}) = 43$$

$$2(-1) + \cancel{10k} + 5 \cdot 9 - \cancel{10k} = 43$$

el conjunto de soluciones es

$$S = \{(-1+5k, 9-2k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

(4) buscamos las soluciones que verifican $x \geq 0$, $y \geq 0$

$$x \geq 0 \Rightarrow -1+5k \geq 0 \Rightarrow 5k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{5} \Rightarrow k \geq 1$$

$$y \geq 0 \Rightarrow 9-2k \geq 0 \Rightarrow 9 \geq 2k \Rightarrow \underset{4,5}{\frac{9}{2}} \geq k \Rightarrow 4 \geq k$$

* $k = 1$

$x = -1+5 = 4$

$y = 9-2 = 7$

$\Rightarrow$ 4 cheques de 20 y 7 de 50

* $k = 2$

$x = -1+5 \cdot 2 = 9$

$y = 9 - 2 \cdot 2 = 5$

* $k = 3$

$x = -1+5 \cdot 3 = 14$

$y = 9 - 2 \cdot 3 = 3$

* $k = 4$

$x = -1+5 \cdot 4 = 19$

$y = 9 - 2 \cdot 4 = 1$

Ejercicio 5. Un hombre va a una ferretería a comprar un trozo de burlete de goma de x metros con y centímetros. Pero el ferretero confunde los metros con centímetros y viceversa, cortando una cantidad distinta de la que el cliente había pedido. Sin percatarse de ello, el cliente toma su paquete y se marcha. Cuando llega a su casa, corta 68 centímetros de burlete y, para su sorpresa, descubre que le queda el doble de lo que pensaba que había comprado. ¿Cuál es la menor cantidad de burlete (en metros y centímetros) que pudo haber pedido dicho cliente?

x = cantidad de metros que pidio

y = cantidad de cm que pidio

cantidad total en cm que pidio : $100x + y$

cantidad total en cm que le dieron: $100y + x$

$$100y + x - 68 = 2(100x + y)$$

$$100y + x - 68 = 200x + 2y$$

$$\boxed{-68 = 199x - 98y}$$

(1) $mcd(199, 98) = ?$

$199 = 98 \cdot 2 + 3 \longrightarrow 3 = 199 - 98 \cdot 2$

$98 = 3 \cdot 32 + 2 \longrightarrow 2 = 98 - 3 \cdot 32$

$3 = 2 \cdot 1 + 1 \longrightarrow 1 = 3 - 2 \cdot 1$

$\Rightarrow mcd(199, 98) = 1$

$\Rightarrow mcd(199, 98) \mid -68$

entonces hay soluciones

(2) buscamos una solución particular

igualdad de Bezout para 199 y 98

$$\begin{aligned}
1 &= 3 - 2 \\
&= 3 - (98 - 3 \cdot 32) \\
&= 3 - 98 + 3 \cdot 32 \\
&= 3 \cdot 33 - 98 \\
&= (199 - 98 \cdot 2) \cdot 33 - 98 \\
&= 199 \cdot 33 - 98 \cdot 66 - 98
\end{aligned}$$

$$x\cdot(-68)\quad 1 = 199\cdot 33 - 98\cdot 67 \qquad -68 = 199\,x - 98\,y$$

$$-68 = 199\cdot(33\cdot(-68)) - 98(67\cdot(-68))$$

$$-68 = 199(-2244) - 98(-4556)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = -2244 \\ y_0 = -4556 \end{array}\right\} \text{solución particular}$$

(3) escribimos el conjunto de soluciones

$$199\left(-2244 + \frac{98}{1}k\right) - 98\left(-4556 + \frac{199}{1}k\right) = -68$$

$$199(-2244) + \cancel{199\cdot\frac{98}{1}k} - 98(-4556) - \cancel{98\cdot\frac{199}{1}}k = -68$$

$$S = \left\{\left(-2244 + \frac{98}{1}k,\ -4556 + \frac{199}{1}k\right) : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(4) buscamos la menor solución con $x \geq 0$, $y \geq 0$

$$x \geq 0 \Rightarrow -2244 + 98k \geq 0$$
$$\Rightarrow 98k \geq 2244$$
$$\Rightarrow k \geq \frac{2244}{98} \approx 22{,}8$$
$$k \geq 23$$

$$y \geq 0 \Rightarrow -4556 + 199k \geq 0$$
$$\Rightarrow 199k \geq 4556$$
$$\Rightarrow k \geq \frac{4556}{199} \approx 22{,}8$$
$$k \geq 23$$

entonces tomamos $k=23$

$$x = -2244 + 98 \cdot 23 = 10$$

$$y = -4556 + 199 \cdot 23 = 21$$

pidio 10 metros y 21 cm