Morfismos de grupos

$(G, *)$, $(K, \cdot)$ dos grupos

una función $f: G \to K$ es un morfismo de grupos si

$$f(g * g') = f(g) \cdot f(g')$$

para todos $g, g' \in G$

consecuencia: $f(e_G) = e_K$

Ejercicio 1

h. La función $f : (\mathbb{R}^3, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, dada por: $f(x, y, z) = e^{x-2y+z}$.

sean $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$

queremos ver si se cumple

$$f((x,y,z) + (x',y',z')) = f(x,y,z) \cdot f(x',y',z')$$

$$\begin{aligned} f((x,y,z) + (x',y',z')) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= e^{x+x' - 2(y+y') + z+z'} \\ &= e^{(x-2y+z)+(x'-2y'+z')} \\ &= e^{x-2y+z} \, e^{x'-2y'+z'} \\ &= f(x,y,z) \, f(x',y',z') \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f es un morfismo de grupos

$f: G \to K$ morfismo de grupos

* $f(e_G) = e_K$

* $g \in G$, $\boxed{o(f(g)) \mid o(g)}$

$n = o(g)$

$g^n = e_G \implies \underbrace{f(g^n)}_{f(g * g * g \cdots * g) = f(g) \cdot f(g) \cdots f(g)} = f(e_G)$

f morfismo de grupos

$\implies f(g)^n = e_K$ $\leftarrow$ $x^n = e \iff o(x) \mid n$

$\implies o(f(g)) \mid n$

$\implies o(f(g)) \mid o(g)$

Ejercicio 2. Sea $\varphi : G_1 \to G_2$ un homomorfismo de grupos finitos.

a. Sea $g \in G_1$. Probar que $o(\varphi(g))$ divide a $\text{mcd}(|G_1|, |G_2|)$.

b. Probar que si $|G_1|$ y $|G_2|$ son coprimos, entonces φ es trivial.

c. Supongamos que φ es un isomorfismo de grupos. Sea $g \in G_1$. Probar que el orden de g en G_1 es igual al orden de $\varphi(g)$ en G_2.

d. Probar que $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no son isomorfos.

G_1 y G_2 grupos finitos

$\varphi: G_1 \to G_2$ morfismo de grupos

a) Sea $g \in G_1$

queremos ver que $o(\varphi(g))$ divide a $\text{mcd}(|G_1|, |G_2|)$

* $o(\varphi(g)) \mid |G_1|$

$g \in G_1$

$\langle g \rangle$ es un subgrupo de G_1

por lagrange $|\langle g \rangle| \mid |G_1|$

como $|\langle g \rangle| = o(g)$

$o(g) \mid |G_1|$

como φ es morfismo de grupos

$o(\varphi(g)) \mid o(g)$

entonces tenemos

$$\left.\begin{array}{l} o(g) \mid |G_1| \\ o(\varphi(g)) \mid o(g) \end{array}\right\} \Rightarrow o(\varphi(g)) \mid |G_1|$$

$\ast$ $o(\varphi(g)) \mid |G_2|$

$\varphi(g) \in G_2 \Rightarrow o(\varphi(g)) \mid |G_2|$

b) $|G_1|$ y $|G_2|$ coprimos $\Rightarrow$ $\underbrace{\varphi \text{ es el morfismo trivial}}_{\varphi(g) = e_{G_2} \text{ para todo } g \in G_1}$

$\varphi : G_1 \to G_2$

sea $g \in G_1$

$o(\varphi(g)) \mid \underbrace{\mathrm{mcd}(|G_1|, |G_2|)}_{=1}$

$o(\varphi(g)) \mid 1 \Rightarrow o(\varphi(g)) = 1 \Rightarrow \varphi(g) = e_{G_2}$

c. Supongamos que φ es un isomorfismo de grupos. Sea $g \in G_1$. Probar que el orden de g en G_1 es igual al orden de $\varphi(g)$ en G_2.

$\varphi : G_1 \to G_2$ isomorfismo de grupos

existe $\varphi^{-1} : G_2 \to G_1$ que también es morfismo de grupos

queremos ver que $o_{G_1}(g) = o_{G_2}(\varphi(g))$

$\varphi: G_1 \to G_2$

$\left.\begin{array}{l} * \ \varphi \text{ morfismo de grupos} \\ \quad g \in G_1 \end{array}\right\} \Rightarrow o_{G_2}(\varphi(g)) \mid o_{G_1}(g)$

$* \ \varphi^{-1}: G_2 \to G_1$

morfismo de grupos

sea $h \in G_2$ $\quad o_{G_1}(\varphi^{-1}(h)) \mid o_{G_2}(h)$

$\varphi(g) \in G_2 \Rightarrow o_{G_1}(\varphi^{-1}(\varphi(g))) \mid o_{G_2}(\varphi(g))$

$\Rightarrow o_{G_1}(g) \mid o_{G_2}(\varphi(g))$

entonces $o_{G_1}(g) = o_{G_2}(\varphi(g))$

d. Probar que $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no son isomorfos.

$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

$\mathbb{Z}_4$

g	$o(g)$
$\bar{0}$	1
$\bar{1}$	4
$\bar{2}$	2
$\bar{3}$	4

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

g	$o(g)$
$(\bar{0},\bar{0})$	1
$(\bar{0},\bar{1})$	2
$(\bar{1},\bar{0})$	2
$(\bar{1},\bar{1})$	2

$(\bar{0},\bar{1}) + (\bar{0},\bar{1}) = (\bar{0}+\bar{0}, \bar{1}+\bar{1})$

como en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no hay elementos de orden 4

tenemos que $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no son isomorfos

Ejercicio 3. En cada caso, determinar si existe algún morfismo no trivial $f : G \to K$ (es decir, que no mande todos los elementos al neutro). Cuando exista, construir uno; y si no existe explicar por qué.

a. $G = \mathbb{Z}_7$ con la suma y $K = S_6$ con la composición.

b. $G = \mathbb{Z}_8$, $K = U(24)$. Sugerencia: G es cíclico.

a) existe $f : \mathbb{Z}_7 \to S_6$ morfismo de grupos no trivial?

$|\mathbb{Z}_7| = 7$

$|S_6| = 6!$

$|\mathbb{Z}_7|$ y $|S_6|$ son coprimos

entonces el único morfismo de grupos $f : \mathbb{Z}_7 \to S_6$ es el trivial

b) $f : \mathbb{Z}_8 \to U(24)$ morfismo de grupos no trivial?

$|\mathbb{Z}_8| = 8$

$U(24) = \varphi(24) = 24\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 8$

$24 = 2^3 \cdot 3$

* $\mathbb{Z}_8$ es cíclico

$\mathbb{Z}_8 = \langle \bar{1} \rangle$

$\to$ un morfismo de grupos $f : \underset{\text{suma}}{\mathbb{Z}_8} \to \underset{\text{producto}}{U(24)}$ queda determinado por $f(\bar{1})$

sea $\bar{a} \in \mathbb{Z}_8 = \langle \bar{1} \rangle$

$\bar{a} = \bar{1}^n = \underbrace{\bar{1} + \bar{1} + \dots + \bar{1}}_{n \text{ veces}}$ para algún $n \in \mathbb{Z}$

$f(\bar{a}) = \underbrace{f(\bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \dots + \bar{1})}_{n \text{ veces}} \overset{f \text{ morfismo de grupos}}{=} \underbrace{f(\bar{1}) f(\bar{1}) \cdots f(\bar{1})}_{n \text{ veces}} = f(\bar{1})^n$

como $\mathbb{Z}_8$ es cíclico y generado por $\bar{1}$ para definir un morfismo de grupos $f: \mathbb{Z}_8 \to U(24)$ alcanza con dar $f(\bar{1})$

* posibilidades para $f(\bar{1})$

$f(\bar{1})$ es un elemento de $U(24)$ que verifica

$$o_{U(24)}(f(\bar{1})) \mid o_{\mathbb{Z}_8}(\bar{1})$$

$$o_{U(24)}(f(\bar{1})) \mid 8$$

tenemos $|U(24)| = \varphi(24) = 8$

entonces $o(g) \mid 8$ para todo $g \in U(24)$

$$U(24) = \{\bar{1}, \underbrace{\bar{5}, \bar{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23}}_{\text{posibilidades para } f(\bar{1}) \text{ que hacen que } f \text{ no sea trivial}}\}$$

$\Rightarrow$ hay 7 morfismos de grupos no triviales de $\mathbb{Z}_8$ en $U(24)$

por ejemplo: $f: \mathbb{Z}_8 \to U(24)$

$$f(\bar{1}) = \bar{5}$$

* $f(\bar{2}) = f(\bar{1}+\bar{1}) = f(\bar{1})f(\bar{1}) = \bar{5}\cdot\bar{5} = \overline{25} = \bar{1}$

* $f(\bar{3}) = f(\bar{1}+\bar{1}+\bar{1}) = f(\bar{1})f(\bar{1})f(\bar{1}) = \bar{5}\cdot\bar{5}\cdot\bar{5} = \bar{5}$