Ejercicio 10. Se define el centro de un grupo G como: $Z_G = \{x \in G : xg = gx, \text{ para todo } g \in G\}$.

a. Calcule el centro de $GL_2(\mathbb{R})$.

b. Probar que Z_G es un subgrupo normal de G, para todo grupo G.

c. Probar que, cualquiera sea $S \subset G$, se tiene: $Z_G \subset N_S$.

d. Probar que si G/Z_G es un grupo cíclico, entonces G es conmutativo.

G un grupo

definimos el centro de G como

$$Z_G = \{x \in G : xg = gx \text{ para todo } g \in G\}$$

a) centro de $GL_2(\mathbb{R})$: $\quad IB = BI \Rightarrow I \in Z_{GL_2(\mathbb{R})}$

$$Z_{GL_2(\mathbb{R})} = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) : AB = BA \text{ para todo } B \in GL_2(\mathbb{R})\}$$

sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Z_{GL_2(\mathbb{R})}$

tenemos que $AB = BA$ para todo $B \in GL_2(\mathbb{R})$

* por ejemplo A conmuta con $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

entonces $AB = BA$ implica

$$\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} b = c \\ d = a \end{matrix}}$$

por ahora $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

* A también conmuta con $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$AC = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ b+a & a \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b+a \end{pmatrix}$$

entonces $AC = CA$ implica

$$\begin{pmatrix} a+b & b \\ b+a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b+a \end{pmatrix} \Rightarrow a = a+b$$
$$\Rightarrow \boxed{b=0}$$

entonces tenemos $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

veamos que si $A = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}}_{=aI}$ entonces $A \in Z_{GL_2(\mathbb{R})}$:

sea $B \in GL_2(\mathbb{R})$

$$AB = aIB = BaI = BA$$

entonces

$$Z_{GL_2(\mathbb{R})} = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) ; \ A = aI \text{ con } a \in \mathbb{R}\}$$

b) G un grupo

queremos ver que Z_G es un subgrupo normal

① Z_G subgrupo de G

* cerrado bajo la operación

sean $x, y \in Z_G$

queremos ver que $\underbrace{xy \in Z_G}_{xyg = gxy \text{ para todo } g \in G}$

sea $g \in G$

$$xyg \underset{\substack{\uparrow \\ y \in Z_G}}{=} xgy \underset{\substack{\uparrow \\ x \in Z_G}}{=} gxy$$

entonces $xy \in Z_G$

* $e_G \in Z_G$?

si $g \in G$ entonces $e_G g = g = g e_G$

* Z_G es cerrado bajo inversos

sea $x \in Z_G$

queremos ver si $x^{-1} \in Z_G$

tomamos $g \in G$

queremos ver que $x^{-1} g = g x^{-1}$

$$x^{-1} g \overset{?}{=} g x^{-1}$$

$$x x^{-1} g x \overset{?}{=} x g x^{-1} x$$

$$gx = xg \checkmark$$

$$x^{-1} g = g x^{-1} \iff \underbrace{gx = xg}_{\text{es cierta porque } x \in Z_G}$$

entonces se cumple $x^{-1} g = g x^{-1}$

y por lo tanto $x^{-1} \in Z_G$

② Z_G es subgrupo normal de G

sea $g \in G$

para ver que Z_G es normal queremos ver que

$$g Z_G = Z_G g$$

$$gZ_G = \{gx : x \in Z_G\} \underset{\substack{\uparrow \\ x \in Z_G}}{=} \{xg : x \in Z_G\} = Z_G g$$

$$Z_G g = \{xg : x \in Z_G\}$$

d. Probar que si G/Z_G es un grupo cíclico, entonces G es conmutativo.

Z_G es un subgrupo normal de G

$\Rightarrow G/Z_G$ es un grupo con la operación

$$(aZ_G)(bZ_G) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{producto} \\ \text{de } G}}{(ab)}Z_G$$

Queremos probar que

G/Z_G es cíclico $\Rightarrow$ G es conmutativo

Sean $x, y \in G$

queremos probar que $xy = yx$

G/Z_G es cíclico, entonces

$$G/Z_G = \langle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{clase lateral de } t \\ \text{con } t \in G}}{tZ_G} \rangle$$

* $xZ_G \in G/Z_G$

$$xZ_G = (tZ_G)^n = \overbrace{(tZ_G)(tZ_G)}^{t^2 Z_G}(tZ_G)\cdots(tZ_G) = t^n Z_G$$

$$xZ_G = t^n Z_G$$

$\Rightarrow x \in t^n Z_G = \{ t^n z : z \in Z_G \}$

$\Rightarrow x = t^n z_1$ para algún $z_1 \in Z_G$

* $yZ_G \in G/Z_G$

$yZ_G = (tZ_G)^m = (tZ_G)(tZ_G)(tZ_G)\cdots(tZ_G) = t^m Z_G$

$y \in t^m Z_G$

$y = t^m z_2$ para algún $z_2 \in Z_G$

tenemos: $x = t^n z_1$ para algún $z_1 \in Z_G$
$y = t^m z_2$ para algún $z_2 \in Z_G$

$$xy = t^n \underbrace{z_1 t^m}_{\substack{\shortparallel \leftarrow z_1 \in Z_G \\ t^m z_1}} z_2 = t^n t^m z_1 z_2 \underset{\substack{\uparrow \\ t^n t^m = t^m t^n}}{=} t^m t^n z_1 z_2 \underset{\substack{\uparrow \\ z_2 \in Z_G}}{=} t^m t^n z_2 z_1 \underset{\substack{\uparrow \\ z_2 \in Z_G}}{=} t^m z_2 t^n z_1 = yx$$

$\Rightarrow xy = yx$

$\Rightarrow G$ es conmutativo

Morfismos de grupos

⇝ funciones entre grupos que preservan la estructura

Sean $(G, *)$ y $(K, \cdot)$ dos grupos

Una función $f: G \to K$ es un morfismo de grupos si para todos $g, g' \in G$ se cumple:

$$f(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{operación} \\ \text{de } G}}{g * g'}) = f(g) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{operación} \\ \text{de } K}}{\cdot} f(g')$$

prop: si $f: G \to K$ es morfismo de grupos entonces $f(e_G) = e_K$

dem.

$$f(e_G) = f(e_G * e_G) = f(e_G) \cdot f(e_G)$$

$$f(e_G) = f(e_G) \cdot f(e_G)$$

$$f(e_G)^{-1} f(e_G) = f(e_G)^{-1} f(e_G) f(e_G)$$

$$e_K = f(e_G)$$

Ejercicio 1 - Practico 10

d) $f: \overset{\swarrow \text{ producto}}{GL_n(\mathbb{R})} \longrightarrow \mathbb{R}^* \swarrow$ producto

$f(A) = \det(A^2)$

f es morfismo de grupos?

Sean $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$

queremos ver si $f(AB) = f(A) f(B)$

$$f(AB) = \det((AB)^2)$$

$$= \det(AB)\det(AB)$$

$$= \det(A)\det(B)\det(A)\det(B)$$

$$= \det(A)^2\det(B)^2$$

$$= \det(A^2)\det(B^2)$$

$$= f(A)f(B)$$

tenemos $f(AB) = f(A)f(B)$

$\Rightarrow$ f es morfismo de grupos