G un grupo

H un subgrupo de G

$g \in G$

* la clase lateral por izquierda asociada a g es

$$gH = \{gh : h \in H\}$$

* la clase lateral por derecha asociada a g es

$$Hg = \{hg : h \in H\}$$

H es <u>subgrupo normal</u> de G si $gH = Hg$ para todo $g \in G$

conjunto cociente es el conjunto formado por todas las clases laterales a izquierda:

$$G/_H = \{gH : g \in G\}$$

si H es normal entonces $G/_H$ es un grupo con esta operación:

$$(g_1 H) \cdot (g_2 H) = (g_1 g_2) H$$

Ejercicio 2.

a. Sea G un grupo conmutativo. Pruebe que todo subgrupo H de G es normal en G.

b. Pruebe que $H = 3\mathbb{Z}$ es normal en $G = (\mathbb{Z}, +)$. Calcule el grupo cociente $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y su tabla de Cayley.

c. Sea G un grupo cíclico. Pruebe que todo subgrupo H de G es normal en G. Sugerencia: pruebe que G es conmutativo.

d. Pruebe que $H = \{\bar{1}, \bar{8}\}$ es subgrupo normal en $G = U(9)$. Halle el cociente G/H y calcule $(\bar{2}H)(\bar{4}H)$.

a) G grupo conmutativo

H un subgrupo de G

queremos ver que H es un subgrupo normal

sea $g \in G$

queremos ver que $gH = Hg$

$$gH = \{gh : h \in H\} \underset{\uparrow}{=} \{hg : h \in H\} = Hg$$

$gh = hg$

porque G es conmutativo

$$x \in Hg \iff x = hg \text{ con } h \in H$$
$$\iff xg^{-1} = h \text{ con } h \in H$$
G conmutativo
$$\iff g^{-1}x = h$$
$$\iff x = gh$$
$$\iff x \in gH$$

$x \sim g$ si $xg^{-1} \in H$

---

b. Pruebe que $H = 3\mathbb{Z}$ es normal en $G = (\mathbb{Z}, +)$. Calcule el grupo cociente $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y su tabla de Cayley.

$H = 3\mathbb{Z} = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$ subgrupo de los multiplos de 3

$\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano $\Rightarrow$ todo subgrupo de $\mathbb{Z}$ es normal en particular $3\mathbb{Z}$ es normal

entonces $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ es un grupo

$$0H = \{0 + x : x \in H\} = \{0 + 3n : n \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{3n : n \in \mathbb{Z}\} \leftarrow \text{los multiplos de 3} \qquad \overline{0}$$

$$1H = \{1 + x : x \in H\} = \{1 + 3n : n \in \mathbb{Z}\} \leftarrow$$ los enteros que tienen resto 1 al dividir entre 3 $\qquad \overline{1}$

$$2H = \{2 + x : x \in H\} = \{2 + 3n : n \in \mathbb{Z}\} \leftarrow$$ los enteros que tienen resto 2 al dividir entre 3 $\qquad \overline{2}$

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0H, 1H, 2H\}$$

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_3$$

$H = 3\mathbb{Z}$

como $3\mathbb{Z}$ es subgrupo normal de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ es un grupo con la operación

$$(aH) + (bH) = (a+b)H$$

tabla de Cayley

+	$0H$	$1H$	$2H$
$0H$	$0H$	$1H$	$2H$
$1H$	$1H$	$2H$	$0H$
$2H$	$2H$	$0H$	$1H$

$0H + 0H = (0+0)H$

$0H + 1H = (0+1)H$
$= 1H$

$1H + 1H = (1+1)H = 2H$

$1H + 2H = (1+2)H = 3H = 0H$

c. Sea G un grupo cíclico. Pruebe que todo subgrupo H de G es normal en G. Sugerencia: pruebe que G es conmutativo.

veamos que si G es cíclico $\Rightarrow$ G es conmutativo

si G es cíclico $\Rightarrow$ existe $g \in G$ tal que $\langle g \rangle = G$

sean $x, y \in G$ queremos ver que $xy = yx$

$x \in G = \langle g \rangle \Rightarrow x = g^k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

$y \in G = \langle g \rangle \Rightarrow y = g^m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$

$$xy = g^k g^m = g^{k+m} = \underbrace{ggg\cdots g}_{k \text{ veces}}\underbrace{g\cdots g}_{m \text{ veces}} = g^m g^k = yx$$

$yx = g^m g^k = g^{m+k}$

entonces G es conmutativo

$\Rightarrow$ todo subgrupo de G es normal

d. Pruebe que $H = \{\bar{1}, \bar{8}\}$ es subgrupo normal en $G = U(9)$. Halle el cociente G/H y calcule $(\bar{2}H)(\bar{4}H)$.

$\mathbb{Z}_9 = \{\underset{\times}{\bar{0}}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\} \leftarrow$ suma

$U(9) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}\} \leftarrow$ producto

$|U(9)| = \varphi(9) = 9(1-\frac{1}{3}) = \frac{9 \cdot 2}{3} = 6$

$H = \{\bar{1}, \bar{8}\}$ subgrupo normal de $U(9)$?

→ veamos si $U(9)$ es cíclico?

para encontrar un generador buscamos un elemento que tenga orden igual a 6

$o(\bar{2}) = ?$

en general

si $g \in G$, G grupo finito

que relación hay entre $o(g)$ y $|G|$

$o(g) \mid |G|$

$o(g) = |\langle g \rangle|$

$\langle g \rangle$ es subgrupo de G $\overset{\text{Lagrange}}{\Longrightarrow}$ $|\langle g \rangle| \mid |G|$

$\Rightarrow o(g) \mid |G|$

buscamos el orden de $\bar{2}$ en $U(9)$

$|U(9)| = 6$

→ las posibilidades para $o(\bar{2})$ son $1, 2, 3, 6$

$\bar{2} \neq \bar{1} \Rightarrow o(\bar{2}) \neq 1$

$\bar{2}^2 = \bar{4} \neq \bar{1} \Rightarrow o(\bar{2}) \neq 2$

$\bar{2}^3 = \bar{8} \neq \bar{1} \Rightarrow o(\bar{2}) \neq 3$

entonces $o(\bar{2}) = 6$ y por lo tanto $\bar{2}$ es generador de $U(9)$

$U(9)$ es cíclico ⇒ todo subgrupo de $U(9)$ es normal

en particular $H = \{\bar{1}, \bar{8}\}$ es subgrupo normal

$U(9)/_H$ es un grupo $\quad g \in U(9) \quad gH = \{g \cdot \bar{1}, g \cdot \bar{8}\}$

→ clases laterales por izquierda:

$\bar{1}H = \{\bar{1} \cdot \bar{1}, \bar{1} \cdot \bar{8}\} = \{\bar{1}, \bar{8}\} = \bar{8}H$

$$\bar{2}H = \{\bar{2}\cdot\bar{1}, \underbrace{\bar{2}\cdot\bar{8}}_{\overline{16}}\} = \{\bar{2},\bar{7}\} = \bar{7}H$$

$$\bar{4}H = \{\bar{4}\cdot\bar{1}, \underbrace{\bar{4}\cdot\bar{8}}\} = \{\bar{4},\bar{5}\} = \bar{5}H$$

$$U(9)/_H = \{\bar{1}H, \bar{2}H, \bar{4}H\}$$

$$(\bar{2}H)(\bar{4}H) = (\bar{2}\cdot\bar{4})H = \bar{8}H = \bar{1}H$$

$$= (\bar{2}\cdot\bar{5})H = \bar{1}H$$

Ejercicio 3. Sea $GL_2(\mathbb{R})$ el grupo de las matrices invertibles 2×2 de coeficientes reales, con el producto usual de matrices. Sean

$$U = \left\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \;/\; A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad T = \left\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \;/\; A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right\}.$$

a. Pruebe que U es un subgrupo de T.

b. Calcule las clases laterales por derecha y por izquierda de U en T.

c. Pruebe que U es un subgrupo normal de T.

d. Pruebe que U es un subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$, y determine si U es un subgrupo normal de $GL_2(\mathbb{R})$.

b) * clases laterales por izquierda de U en T

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T$$

$$AU = \{AB : B \in U\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & c \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\right\}$$

* clases laterales por derecha de U

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T$$

$$UA = \{BA : B \in U\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b+cx \\ 0 & c \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

c) ¿U subgrupo normal de T?

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T$$

$$AU = \left\{ \begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & c \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$UA = \left\{ \begin{pmatrix} a & b+cx \\ 0 & c \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

queremos ver que $AU = UA$ para todo $A \in T$

* ¿$AU \subset UA$?

tomamos $\begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in AU$

queremos ver $\begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in UA$

es decir buscamos $B \in U$ tal que

$$B\underbrace{A}_{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & c \end{pmatrix} \leftarrow \overbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}}^{=A} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\in U}$$

$$B \in U \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir buscamos $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}}_{\parallel} = \begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b+cy \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

es decir buscamos $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$\cancel{b}+cy = ax+\cancel{b}$$

$$\boxed{y = \frac{a}{c}x}$$

<u>en conclusión</u>

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c}x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in U}\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}}_{=A}}_{\in UA} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & c \end{pmatrix}}_{\in AU} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces $AU \subset UA$

de forma analoga se prueba que $UA \subset AU$