$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$

construcción de $\mathbb{Z}_n$

$(\mathbb{Z}, +)$ grupo

$\underline{a \sim b}$ sii $\overbrace{a \equiv b \pmod{n}}^{n \mid a-b}$

↳ es una relación de equivalencia

podemos considerar el conjunto cociente

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$$

otra forma de ver la construcción de $\mathbb{Z}_n$

$(\mathbb{Z}, +)$ grupo

$n\mathbb{Z}$ subgrupo de $\mathbb{Z}$ formado por los múltiplos de n

$a \sim b$ sii $\underline{a-b \in n\mathbb{Z}}$

$\Leftrightarrow$ $a-b$ es múltiplo de n

$\Leftrightarrow$ $a \equiv b \pmod{n}$

↑ relación de equivalencia

clases laterales

$a \in \mathbb{Z}$

$(n\mathbb{Z})a = n\mathbb{Z} + a$

$= \{0+a, n+a, 2n+a, \dots\}$

$= \bar{a}$

consideramos el conjunto cociente

$\underbrace{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_{= \mathbb{Z}_n}$ = conjunto de las clases de equivalencia

$$(n\mathbb{Z})a + (n\mathbb{Z})b = (n\mathbb{Z})(a+b)$$

generalizamos

G un grupo

H subgrupo normal de G

definimos la siguiente relación de equivalencia

$$x \sim y \quad \text{sii} \quad xy^{-1} \in H$$

clase de equivalencia de y:

$$\bar{y} = \{x \in G : x \sim y\} = \{x \in G : xy^{-1} \in H\}$$

$= \{x \in G : xy^{-1} = h \text{ con } h \in H\}$

$= \{x \in G : x = hy \text{ con } h \in H\}$

$= Hy$

clase lateral derecha de y

consideramos el conjunto cociente

G/H = conjunto de las clases de equivalencia de $\sim$
= conjunto de clases laterales a derecha de y
= conjunto de clases laterales a izquierda de y

$$G/H = \{Hy : y \in G\}$$

queremos que G/H sea un grupo con

$$(Hx) \cdot (Hy) \overset{\text{definición}}{=} H(x * y)$$

operación en G/H — operación de G

tenemos que ver que la operación está bien definida:

$$\left.\begin{array}{l} Hx = Hx' \\ Hy = Hy' \end{array}\right] \Rightarrow \underline{H(x*y) = H(x'*y')} \;?$$

$xy = (\underset{\text{en } H}{\uparrow})\, x'y'$

$*$ $\left.\begin{array}{l} Hx = Hx' \\ x \in Hx \end{array}\right\} \Rightarrow x \in Hx' \Rightarrow x = h_1 x'$ para algún $h_1 \in H$

H subgrupo $\Rightarrow e \in H$

$Hx = \{hx : h \in H\}$

$*$ $\left.\begin{array}{l} Hy = Hy' \\ y \in Hy \end{array}\right\} \Rightarrow y \in Hy' \Rightarrow y = h_2 y'$ para algún $h_2 \in H$

queremos ver $H(xy) = H(x'y')$

alcanza con ver que $xy \in H(x'y')$

porque esto implica $xy \sim x'y'$

y por lo tanto tienen la misma clase de equivalencia

vamos a probar que $xy \in H(x'y')$

para esto queremos escribir

$$xy = h_3 x'y'$$

$$xy = h_1 \underbrace{x'h_2}y' = \overbrace{h_1 h_4}^{\in H} x'y' \in H(x'y')$$

$h_1 \in H$ $\quad x'h_2 \in x'H = Hx' \leftarrow H$ subgrupo normal

$h_2 \in H$ $\quad \Rightarrow x'h_2 \in Hx' \Rightarrow x'h_2 = h_4 x'$ con $h_4 \in H$

H subgrupo normal si $gH = Hg$ para todo $g \in G$

Ejercicio 1. En cada caso, hallar las clases laterales por izquierda y por derecha del subgrupo H en el grupo G, y determinar si H es un subgrupo normal de G.

a. El grupo aditivo $G = \mathbb{Z}_6$, y el subgrupo $H = \langle \bar{3} \rangle$, generado por la clase $\bar{3} \in \mathbb{Z}_6$.

b. El grupo multiplicativo $G = U_{14}$, y el subgrupo $H = \langle \overline{13} \rangle$.

c. $G = D_3$, el grupo de las simetrías de un triángulo equilatero (con la operación de composición), y $H = \langle s_1 \rangle$, el subgrupo generado por la simetría axial del triángulo.

a) $G = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$$H = \langle \bar{3} \rangle = \{\bar{3}, \underbrace{\bar{3}+\bar{3}}_{\substack{=\overline{3+3} \\ =\bar{0}}}, \bar{3}+\bar{3}+\bar{3}, \ldots\}$$

$o(\bar{3}) = 2$

$H = \langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\}$

* clases laterales por izquierda:

$\bar{0}H = \{\bar{0}+\bar{0}, \bar{0}+\bar{3}\} = \{\bar{0}, \bar{3}\}$

$\bar{1}H = \{\bar{1}+\bar{0}, \bar{1}+\bar{3}\} = \{\bar{1}, \bar{4}\}$

$\overline{2}H = \{\overline{2}+\overline{0}, \overline{2}+\overline{3}\} = \{\overline{2}, \overline{5}\}$

$\overline{3}H = \{\overline{3}+\overline{0}, \underbrace{\overline{3}+\overline{3}}_{=\overline{0}}\} = \{\overline{3}, \overline{0}\} = \overline{0}H$

entonces las clases laterales por izquierda son:

$\overline{0}H = \overline{3}H = \{\overline{0}, \overline{3}\}$

$\overline{1}H = \overline{4}H = \{\overline{1}, \overline{4}\}$

$\overline{2}H = \overline{5}H = \{\overline{2}, \overline{5}\}$

* clases laterales por derecha

$H\overline{0} = \{\overline{0}+\overline{0}, \overline{3}+\overline{0}\} = \{\overline{0}, \overline{3}\} = H\overline{3}$

$H\overline{1} = \{\overline{0}+\overline{1}, \overline{3}+\overline{1}\} = \{\overline{1}, \overline{4}\} = H\overline{4}$

$H\overline{2} = \{\overline{0}+\overline{2}, \overline{3}+\overline{2}\} = \{\overline{2}, \overline{5}\} = H\overline{5}$

entonces obtuvimos que $gH = Hg$ para todo $g \in \mathbb{Z}_6$

$\Rightarrow H$ es subgrupo normal