Ejercicio 4. En un libro de mil hojas, numeradas del 1 al 1000, se arrancan todas las hojas cuyo número contenga algún dígito impar (p. ej. se eliminan las hojas 7, 12, 93, 100, pero no la 248). Luego de arrancar las hojas:

hojas 1, 2, ..., 1000

hojas que quedan:

	pos 5	pos 10	pos 15	pos 20	
	20	40	60	80	
pos 1 2	22	42	62	82	
pos 2 4	24	44	64	84	bloque 0
pos 3 6	26	46	66	86	
pos 4 8	28	48	68	88	

pos 25 200	220	240	260	280	
202					
204					bloque 1
206					
208	228	248	268	288	

pos 50 400	$\xrightarrow{+5}$ 420	$\xrightarrow{+5}$ 440	$\xrightarrow{+5}$ 460	$\xrightarrow{+5}$ 480	
402				482	+1
404					bloque 2
406					
408	428	448	468	488	

pos 75 600	620 pos 80	680
	622	
	624 pos 82	
608		688

800	880
808	888

* que posición ocupa la hoja $482 \longrightarrow \boxed{2\cdot 2 \mid 2\cdot 4 \mid 2\cdot 1}$

$$482 = 2\cdot 200 + 4\cdot 20 + 1\cdot 2$$

posición de 482: $2\cdot 25 + 4\cdot 5 + 1 = 2\cdot 5^2 + 4\cdot 5^1 + 1\cdot 5^0 = 71$

* que posición ocupa la hoja $\boxed{2x \mid 2y \mid 2z}$

$$\text{hoja} = 2x\cdot 100 + 2y\cdot 10 + 2z$$

$$= x\cdot 200 + y\cdot 20 + z\cdot 2$$

la posición aumenta en 1 por cada 2 hojas

la posición avanza en 25 por cada 200 hojas

la posición aumenta en 5 por cada 20 hojas

$$\text{posición} = x\cdot 25 + y\cdot 5 + z\cdot 1$$

$$= x\cdot 5^2 + y\cdot 5^1 + z\cdot 5^0$$

* que hoja está en la posición 82:

$$82 = 3\cdot 25 + 1\cdot 5 + 2 = 3\cdot 5^2 + 1\cdot 5^1 + 2\cdot 5^0$$

la hoja que está en está posición es: 624

* que hoja está en la posición n?

escribimos la posición en base 5

$$n = x\cdot 5^2 + y\cdot 5^1 + z\cdot 5^0$$

$$\text{hoja} = \boxed{2x \mid 2y \mid 2z} = x\cdot 200 + y\cdot 20 + z\cdot 2$$

Divisibilidad

Teorema de la división entera: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, existen únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que: * $a = bq + r$

* $0 \leq r < |b|$

q es el cociente y r es el resto.

Ejercicio 5. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de:

a. la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18.

b. la división de $a^2 + 7$ por 36.

a) $a = 18q + 5$ para algún $q \in \mathbb{Z}$

$$a^2 - 3a + 11 = \underset{\in \mathbb{Z}}{18Q} + \underset{0 \leq r < 18}{r}$$

$$\begin{aligned} a^2 - 3a + 11 &= (18q+5)^2 - 3(18q+5) + 11 \\ &= 18 \cdot 18q^2 + 18q \cdot 5 \cdot 2 + 25 - 18 \cdot 3q - 15 + 11 \\ &= 18 \cdot 18q^2 + 18 \cdot 10q - 18 \cdot 3q + 21 \\ &= 18 \cdot 18q^2 + 18 \cdot 7q + 21 \\ &= 18(18q^2 + 7q) + 21 \\ &= 18(18q^2 + 7q) + 18 + 3 \\ &= 18\underbrace{(18q^2 + 7q + 1)}_{\in \mathbb{Z}} + 3 \end{aligned}$$

$a^2 - 3a + 11 = 18Q + 3$ con $Q \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ el resto es 3

b) resto de la división de $a^2 + 7$ por 36

$$a^2 + 7 = 36Q + \underset{0 \leq r < 36}{r}$$

$a = 18q + 5$

$$a^2+7=(18q+5)^2+7$$
$$=18\cdot\underbrace{18}_{2\cdot 9}q^2+\overline{18}q\cdot 5\cdot\overline{2}+25+7$$
$$=36\cdot 9q^2+\overline{36}\cdot 5q+32$$
$$=36\underbrace{(9q^2+5q)}_{\in\mathbb{Z}}+\underset{\uparrow\ \text{resto}}{32}$$

$$36=18\cdot 2$$

$$18\cdot 18q^2=\overline{18\cdot 2}\cdot 9q^2=36\cdot 9q^2$$

$n,m\in\mathbb{Z}$

Decimos que m divide a n si existe $q\in\mathbb{Z}$ tal que $n=qm$ o equivalentemente si el resto de dividir n entre m es 0.

si m divide a n escribimos $m|n$

si no escribimos $m\nmid n$

Ejercicio 6. Sean $a,b,c,d\in\mathbb{N}$. Probar o refutar con un contraejemplo las siguientes afirmaciones:

a. Si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$.

b. Si $a|b$ entonces $ac|bc$.

c. Si $a\nmid bc$ entonces $a\nmid b$ y $a\nmid c$.

d. Si $ac|bc$ entonces $a|b$.

e. Si $a|bc$ entonces $a|b$ o $a|c$.

f. Si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$.

g. Si $4|a^2$ entonces $2|a$.

h. Si $9|b+c$ entonces $9|b$ o $9|c$.

i. Si $a+c|b+c$ entonces $a|b$.

a) $\underbrace{a|b}_{\substack{b=aq\\ q\in\mathbb{Z}}}$ y $\underbrace{c|d}_{\substack{d=cq'\\ q'\in\mathbb{Z}}}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{ac|bd}_{bd=acq'' \text{ con } q''\in\mathbb{Z}}$?

$$bd=aqcq'=ac\overbrace{qq'}^{\in\mathbb{Z}}$$

$a|b \Rightarrow b=aq$ para algún $q\in\mathbb{Z}$

$c|d \Rightarrow d=cq'$ para algún $q'\in\mathbb{Z}$

Entonces $bd=aqcq'=ac\underbrace{qq'}_{\in\mathbb{Z}}$

Entonces $ac|bd$

i) $\underbrace{a+c \mid b+c}_{\substack{b+c=(a+c)q \\ =aq+cq}} \Rightarrow \underbrace{a \mid b}_{b=aq'}$? Falso!

$3+1 \mid 7+1$ pero $3 \nmid 1$

$4+1 \mid 9+1$ pero $4 \nmid 9$

e) $a \mid bc \Rightarrow a \mid b$ o $a \mid c$?

$6 \mid 12$

$12 = 4 \cdot 3$

y $6 \nmid 4$, $6 \nmid 3$

f) $a \mid c$ y $b \mid c$ entonces $ab \mid c$?

$a = 4$

$b = 6$

$c = 12$

$4 \mid 12$

$6 \mid 12$

pero $24 \nmid 12$

c) $a \nmid bc \Rightarrow a \nmid b$ y $a \nmid c$? verdadero

Supongamos que $a \mid b$

entonces $b = aq$ para algún $q \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow bc = a\underbrace{qc}_{\in \mathbb{Z}}$

$\Rightarrow a \mid bc$

Absurdo!

$bc = qa + r$ con $r \neq 0$

$b = q'a + r'$

Ejercicio 8. Probar que $n(2n+1)(7n+1)$ es divisible entre 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para ver que $n(2n+1)(7n+1)$ es divisible entre 6 podemos ver que es divisible entre 2 y entre 3.

① $n(2n+1)(7n+1)$ es divisible entre 2

* $n = 2q$

$$n(2n+1)(7n+1) = 2q(2(2q)+1)(7(2q)+1) \text{ es divisible entre } 2$$

* $n = 2q+1$

$$7n+1 = 7(2q+1)+1 = 14q+7+1 = 14q+8 \text{ es divisible entre } 2$$

entonces $n(2n+1)\underbrace{(7n+1)}_{\text{divisible entre } 2}$ es divisible entre 2

② $n(2n+1)(7n+1)$ divisible entre 3

* $n = 3q$

* $n = 3q+1$

* $n = 3q+2$