Ejercicio 7. Sea G un grupo abeliano. Probar que H es un subgrupo de G para los siguientes casos:

a. $H = \{a \in G : a^2 = e_G\}$.

b. $H = \{a^n : a \in G\}$ con n un entero positivo dado.

G abeliano: $a * b = b * a$ para todo $a, b \in G$

a) $H = \{a \in G : a^2 = e_G\}$ subgrupo de G

① cerrado bajo la operación

$(ab)^2 = e_G$?

sean $a, b \in H$ queremos ver que $ab \in H$

$a \in H \Rightarrow a^2 = e_G$

$b \in H \Rightarrow b^2 = e_G$

$(ab)^2 = abab \underset{\uparrow}{=} aabb = a^2 b^2 = e_G e_G = e_G$

G abeliano

② el neutro está en H:

$e_G^2 = e_G \Rightarrow e_G \in H$

③ H es cerrado bajo inversos

sea $a \in H$

$\Rightarrow a^2 = e_G \Rightarrow a^{-1} = a \Rightarrow a^{-1} \in H$

b) $H = \{a^n : a \in G\} = \{x \in G : x = c^n \in G\}$ n fijo

① H cerrado bajo la operación

$xy = c^n$ para algún $c \in G$

sean $x, y \in H$, queremos ver que $xy \in H$

$x \in H \Rightarrow x = a^n$ para algún $a \in G$

$y \in H \Rightarrow y = b^n$ para algún $b \in G$

$xy = a^n b^n = aa \cdots abb \cdots b$

$= abab \cdots ab$) G es abeliano

$= (ab)^n$

$xy = (\underbrace{ab}_{\in G})^n \Rightarrow xy \in H$

② el neutro está en H

$e_G = e_G^n \Rightarrow e_G \in H$

③ H es cerrado bajo inversos

Sea $x \in H$, queremos ver que x^{-1}

$x \in H \Rightarrow x = a^n$ para algún $a \in G$

$x^{-1} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n \Rightarrow x^{-1} \in H$

$$\underbrace{aa\cdots aa}_{a^n}\underbrace{(a^{-1}a^{-1}\cdots a^{-1})}_{(a^{-1})^n} = e_G \Rightarrow (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$$

Ejercicio 8. Sea G un grupo con neutro e. Supongamos que existen elementos $a, b \in G$, tales que: $a \neq e$, $b \neq e$, $a^7 = e$, $b^3 = e$ y $ab = ba^2$. Probar que:

a. G no es conmutativo. **b**. $(ab)^2 = b^2a^6$. **c**. $(ab)^3 = e$.

G grupo

$a, b \in G$

$a \neq e$, $b \neq e$

$a^7 = e$

$b^3 = e$

$ab = ba^2$

a) G no es conmutativo

Supongamos por absurdo que G es conmutativo

$\Rightarrow ab = ba$

$\Rightarrow ba^2 = ba$

$\Rightarrow b^{-1}ba^2 = b^{-1}ba$

$\Rightarrow a^2 = a$

$\Rightarrow a^{-1}aa = a^{-1}a$

$\Rightarrow a = e$

absurdo!

b) queremos probar que $(ab)^2 = b^2a^6$

$$(ab)^2 = (ab)(ab) = (ba^2)(ba^2) = b\underbrace{ab}_{=ba^2}aa = b\underbrace{ab}_{=ba^2}a^2aa = bba^2a^2aa = b^2a^6$$

Grupo de permutaciones S_n

$n \in \mathbb{Z}^+$

$S_n = \{ f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\} : f \text{ función biyectiva} \}$

$\to$ si $n = 2$:

los elementos de S_2 son

$id : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$

$\tau : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$

$\tau(1) = 2$

$\tau(2) = 1$

$(S_n, \circ, id)$ es un grupo

notación:

si $f \in S_n$

vamos a representar f como la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ pos.}}}{f(1)} & \underset{\substack{\uparrow \\ n-1 \text{ pos}}}{f(2)} & \underset{\substack{\uparrow \\ n-2 \text{ pos}}}{f(3)} & \cdots & \underset{\substack{\uparrow \\ 1 \text{ pos}}}{f(n)} \end{pmatrix}$$

la cantidad de elementos de S_n es $n!$

$$S_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{id}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\tau} \right\}$$

$$S_3 = \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}^{id}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}^{\tau_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{\tau_2}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}^{\tau_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_2} \right\}$$

el inverso de τ_1 es τ_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

σ_1 y σ_2 son inversos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{id}$$

Ejercicio 4

g. $G = S_3$ el grupo de permutaciones de 3 elementos, y $H = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{id}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{f} \right\}$.

H subgrupo de G?

(2) el neutro de S_3 está en H

(3) cerrado bajo inversos? si

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in H$$

(1) cerrado bajo la composición? si

$$id^2 = id$$

$$id \circ f = f \circ id = f$$

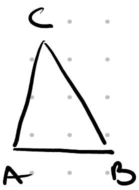
$$f^2 = id$$

$\Rightarrow$ H es un subgrupo de S_3

Grupos dihedrales

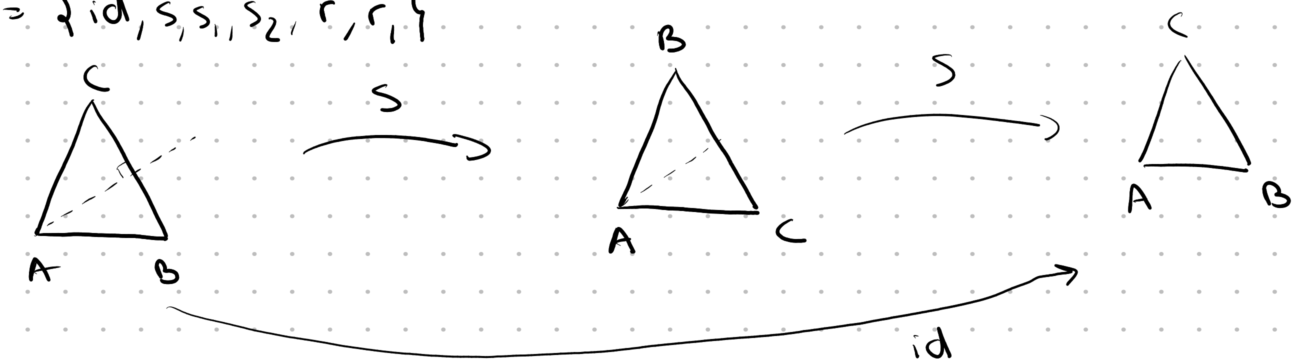
$\rightarrow$ vamos a hablar de D_3

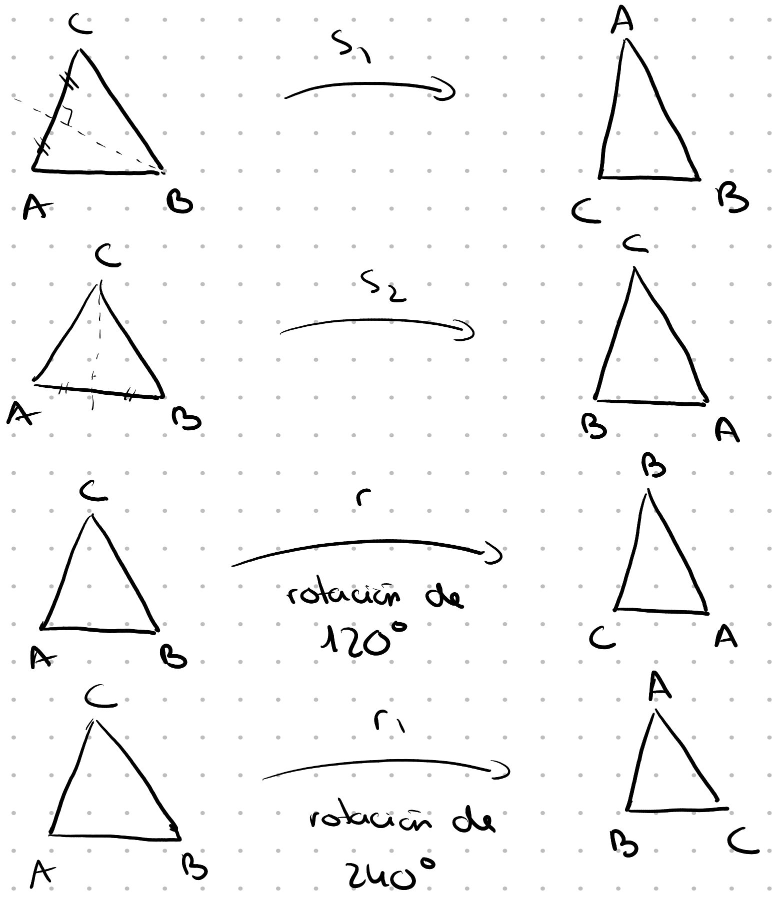
D_3 = el conjunto de transformaciones del plano que dejan el triangulo equilatero fijo



$(D_3, \circ, id)$ grupo

$$D_3 = \{id, s, s_1, s_2, r, \overset{r^2}{\overset{\shortparallel}{r_1}}\}$$





$r_1 = r^2$

otra forma de escribir D_3

$$D_3 = \{id, s, \overset{s_1}{\overset{\shortparallel}{sr}}, sr^2, r, r^2\}$$