Ejercicio 3. Sea $(G, \cdot)$ un grupo con neutro e. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, $\forall\, a, b \in G$.

b. $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$, $\forall\, a \in G$, $n \in \mathbb{N}$.

c. Si $gh = e$ o $hg = e$, entonces $h = g^{-1}$.

d. Si $(ab)^3 = e$ entonces $(ba)^3 = e$.

e. Si $xg = xh$ o $gx = hx$, para algún $x \in G$, entonces $g = h$.

$(G, \cdot, e)$ grupo

a) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ para todo $a, b \in G$

para que $b^{-1}a^{-1}$ sea el inverso de ab se tiene que cumplir $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$ y $(b^{-1}a^{-1})(ab) = e$

$* \; (ab)(b^{-1}a^{-1}) = a\underbrace{bb^{-1}}a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$

la operación es asociativa

$* \; (b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}\underbrace{a^{-1}a}b = b^{-1}eb = b^{-1}b = e$

entonces $b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$

c) Si $gh = e$ o $hg = e$ entonces $h = g^{-1}$

Supongamos que vale $gh = e$

$gh = e \Rightarrow g^{-1}gh = g^{-1}e$

$\Rightarrow h = g^{-1}$

d) $(ab)^3 = e \Rightarrow \underbrace{(ba)^3 = e} \longrightarrow bababa = e$

$(ab)^3 = e \Rightarrow a\underbrace{babab} = e$

$\Rightarrow a^{-1} = babab$

$(ba)^3 = \underbrace{babab}a = a^{-1}a = e$

otra forma: $(ab)^3 = e \Rightarrow ababab = e$

$\Rightarrow \underbrace{bababab}b^{-1} = beb^{-1}$

$\Rightarrow bababa = e$

$\Rightarrow (ba)^3 = e$

Subgrupos

Dado un grupo $(G, *, e_G)$, un subconjunto H de G es un subgrupo de G si verifica:

1. cerrado bajo la operación:

   $h, h' \in H \Rightarrow h * h' \in H$

2. el neutro está en H

   $e_G \in H$

3. cerrado bajo inversos

   $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$

$\rightsquigarrow (H, *, e_G)$ es un grupo

Ejercicio 4. Para cada uno de los grupos G, investigar si H es un subgrupo de G:

a. $G = (\mathbb{Z}, +)$ y $H = n\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros múltiplos de n (para $n \in \mathbb{Z}$ dado).

1. cerrado bajo la suma?

   sean $x, y \in H$, queremos ver que $x + y \in H$

   $x \in H \Rightarrow x = nq$ para algún $q \in \mathbb{Z}$

   $y \in H \Rightarrow y = nq'$ para algún $q' \in \mathbb{Z}$

   $x + y = nq + nq' = n\underbrace{(q + q')}_{\in \mathbb{Z}}$ es múltiplo de n

   entonces $x + y \in H$

   $\Rightarrow H$ es cerrado bajo la suma

2. el neutro está en H?

   el neutro es $0 = n \cdot 0$

   $\Rightarrow 0 \in H$

3. cerrado bajo inversos?

   sea $x \in H$

$\Rightarrow x = nq$ para algún $q \in \mathbb{Z}$

en $(\mathbb{Z},+)$ los inversos son los opuestos

$$x^{-1} = -x = -nq = n\underbrace{(-q)}_{\in \mathbb{Z}}$$

$\Rightarrow x^{-1}$ es múltiplo de n

$\Rightarrow x^{-1} \in H$

entonces $H = n\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z},+)$

c. $G = GL_2(\mathbb{R})$ (matrices invertibles 2×2 con coeficientes reales) con el producto usual de matrices y $H = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : ac \neq 0\right\}$.

① cerrado bajo la operación

sean $A, B \in H$

queremos ver si $AB \in H$

$$A = \underset{ac \neq 0}{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}} \qquad B = \underset{a'c' \neq 0}{\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}$$

$$aa'cc' = \underbrace{ac}_{\neq 0}\underbrace{a'c'}_{\neq 0} \neq 0$$

$\Rightarrow AB \in H$

② el neutro está en H

el neutro de $GL_2(\mathbb{R})$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que está en H

③ cerrado bajo inversos

sea $A \in H$

queremos ver si $A^{-1} \in H$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/c \end{array}\right)$$

$\underbrace{\quad\quad}_{A}$

$ac \neq 0$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 & -b/c \\ 0 & 1 & 0 & 1/c \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/a & -b/ac \\ 0 & 1 & 0 & 1/c \end{array}\right)$$

A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/ac \\ 0 & 1/c \end{pmatrix} \in H$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c} \neq 0$$

H es cerrado bajo inversos

$\Rightarrow$ H es un subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$

e. $G = \mathbb{Q}^+$ con el producto y $H = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a \equiv 0 \pmod 7,\ \operatorname{mcd}(b,7) = 1\right\}$.

(1) H cerrado bajo la operación?

sean $x, y \in H$

queremos ver si $xy \in H$

$x \in H \Rightarrow x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ con $a \equiv 0 \pmod 7$ y $\operatorname{mcd}(b,7) = 1$

$y \in H \Rightarrow y = \dfrac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}$ con $a' \equiv 0 \pmod 7$ y $\operatorname{mcd}(b',7) = 1$

$$xy = \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$$

* $\operatorname{mcd}(bb', 7) = 1$?

si $\operatorname{mcd}(bb', 7) \neq 1 \Rightarrow 7 \mid bb'$

$\Rightarrow 7 \mid b$ o $7 \mid b'$

absurdo porque $\operatorname{mcd}(b,7) = 1$ y $\operatorname{mcd}(b',7) = 1$

entonces $\text{mcd}(bb', 7) = 1$

* $aa' \equiv 0 \pmod 7$?

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv 0 \pmod 7 \\ a' \equiv 0 \pmod 7 \end{array}\right\} \Rightarrow aa' \equiv 0 \pmod 7$$

entonces $xy \in H$

② el neutro está en H? $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$

el neutro de $\mathbb{Q}^+$ con el producto es $\frac{1}{1}$

$1 \not\equiv 0 \pmod 7$

entonces el neutro no está en H

no es multiplo de 7

$\frac{1}{1} = \frac{7}{7}$ no es coprimo con 7

$\Rightarrow H$ no es subgrupo de $\mathbb{Q}^+$

Grupos abeliano (conmutativo)

Decimos que $(G, *, e)$ es abeliano si $x*y = y*x$ para todo $x, y \in G$.

$\rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ es abeliano

$\rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ no es abeliano

Ejercicio 6. Sea $(G, \cdot)$ un grupo con neutro e. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, $\forall\, a, b \in G \Leftrightarrow G$ es abeliano. **b**. $(ab)^2 = a^2b^2$, $\forall\, a, b \in G \Leftrightarrow G$ es abeliano.

a) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ para todo $a, b \in G \iff G$ abeliano

$(\Leftarrow)$

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \underset{\uparrow}{=} a^{-1}b^{-1}$$

G es abeliano

$(\Rightarrow)$ sean $a, b \in G$

queremos ver que $ab = ba$

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \Rightarrow b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$
$$\Rightarrow bb^{-1}a^{-1} = ba^{-1}b^{-1}$$
$$\Rightarrow a^{-1} = ba^{-1}b^{-1}$$
$$\Rightarrow aa^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$$
$$\Rightarrow e = aba^{-1}b^{-1}$$
$$\Rightarrow eb = aba^{-1}b^{-1}b$$
$$\Rightarrow b = aba^{-1}$$
$$\Rightarrow ba = aba^{-1}a$$
$$\Rightarrow ba = ab$$

otra forma:

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \Rightarrow b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$
$$\Rightarrow (b^{-1}a^{-1})^{-1} = (a^{-1}b^{-1})^{-1}$$
$$\Rightarrow (a^{-1})^{-1}(b^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1}$$
$$\Rightarrow ab = ba$$