Sistemas de numeración

$$\left.\begin{aligned} 123 &= 1\cdot 100 + 2\cdot 10 + 3\cdot 1 \\ &= \underset{\uparrow}{1}\cdot 10^2 + \underset{\uparrow}{2}\cdot 10^1 + \underset{\uparrow}{3}\cdot 10^0 \end{aligned}\right\} \text{base } 10$$

coeficientes están entre 0 y 9

* vamos a escribir 123 en base 5

$$123 = \underbrace{4\cdot 25}_{100} + \underbrace{4\cdot 5}_{20} + \underbrace{3\cdot 1}_{3} = \underset{\uparrow}{4}\cdot 5^2 + \underset{\uparrow}{4}\cdot 5^1 \cdot \underset{\uparrow}{3}\cdot 5^0 = (443)_5$$

en base 5 los dígitos son 0, 1, 2, 3, 4

Algoritmo general

Teorema de división entera: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$ existen únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tales: * $a = bq + r$

* $0 \leq r < |b|$

q es el cociente y r es el resto

$$\begin{aligned} 123 &= 5\cdot \underbrace{24} + 3 \\ &= 5\cdot(5\cdot 4 + 4) + 3 \\ &= 5^2\cdot 4 + 5\cdot 4 + 5^0\cdot 3 \end{aligned}$$

entonces $123 = (443)_5$

* dígitos en base 3: 0, 1, 2

$$(201)_3 = 2\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 = 18 + 0 + 1 = (19)_{10}$$

$(201)_3$ en base $9 = 3^2$

$$(201)_3 = 2\cdot 3^2 + \underbrace{0\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0}_{=1} = 2\cdot 9^1 + 1\cdot 9^0 = (21)_9$$

$(201)_3$ en base 7

$$(201)_3 = 19 = 2\cdot 7 + 5 = \underset{\uparrow}{2}\cdot 7^1 + \underset{\uparrow}{5}\cdot 7^0 = (25)_7$$

Ejercicio 1.

a. Escribir en las bases 2, 4 y 16 los números decimales 137 y 6243.

b. Escribir en la base 28 el número decimal 16912.

c. Escribir en las bases 2 y 10 los números hexadecimales $A7$, $4C2$, $1C2B$ y $A2DFE$.

d. Escribir en las bases 10 y 16 los números binarios 11001110, 00110001, 11110000 y 01010111.

e. Escribir en la base decimal el número dado en la base indicada: $OJO_{(25)}$.

a) * 137 en base 4 :

$$137 = 4\cdot \underline{34} + 1$$
$$= 4(4\cdot\underline{8} + 2) + 1$$
$$= 4(4(4\cdot 2 + 0) + 2) + 1$$
$$= 4^3\cdot 2 + 4^2\cdot 0 + 4^1\cdot 2 + 4^0\cdot 1$$

$$137 = (2021)_4$$

* 137 en base 16

<u>forma 1</u> :

$$137 = 16\cdot 8 + 9 = (89)_{16}$$

<u>forma 2</u>: $16 = 4^2$

$$137 = 4^3\cdot 2 + \cancel{4^2\cdot 0} + \overbrace{4^1\cdot 2}^{8} + \overbrace{4^0\cdot 1}^{1}$$
$$= 4^2\cdot 4\cdot 2 + 9$$
$$= 16\cdot 8 + 9$$
$$= 16^1\cdot 8 + 16^0\cdot 9$$

$$137 = (89)_{16}$$

los dígitos en base 16

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\underset{10}{A},\underset{11}{B},\underset{12}{C},\underset{13}{D},\underset{14}{E},\underset{15}{F}$$

$$10\cdot 16^2 + 13\cdot 16^1 + 14\cdot 16^0 = (ADE)_{16}$$

$$((10)(13)(14))_{16}$$

c) vamos a escribir $(4C2)_{16}$ en base 10 y en base 2

* $(4C2)_{16}$ en base 10

$$(4C2)_{16} = 4\cdot 16^2 + C\cdot 16^1 + 2\cdot 16^0$$
$$= 4\cdot 16^2 + 12\cdot 16^1 + 2\cdot 16^0$$
$$= 1218$$

* $(4C2)_{16}$ en base 2

$$(4C2)_{16} = 4\cdot 16^2 + 12\cdot 16^1 + 2\cdot 16^0$$
$$= 2^2\cdot(2^4)^2 + 12\cdot 2^4 + 2$$
$$= 2^2(2^4)^2 + (2^3+2^2)\cdot 2^4 + 2^1$$
$$= 2^2\cdot 2^8 + 2^3\cdot 2^4 + 2^2\cdot 2^4 + 2^1$$
$$= 2^{10} + 2^7 + 2^6 + 2^1$$
$$= 1\cdot 2^{10} + 0\cdot 2^9 + 0\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + \ldots + 2^1$$
$$= (\underset{2^{10}}{1}\,\underset{2^9}{0}\,\underset{2^8}{0}\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,\underset{2^1}{1}\,\underset{2^0}{0})_2$$

$12 = 8 + 4 = 2^3 + 2^2$

$12 = 2\cdot 6 + 0$
$= 2(2\cdot \underline{3} + 0) + 0$
$= 2(2\cdot(2+1) + 0) + 0$
$= 2^3 + 2^2$

Ejercicio 3. En el *Juego del Polinomio* alguien elige (en secreto) un polinomio de coeficientes enteros no negativos, y de cualquier grado. Es decir, un polinomio de la forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_i \in \mathbb{Z},\ a_i \geq 0,\ \forall\, i.$$

Nosotros tenemos que adivinar de qué polinomio se trata. Para esto podemos preguntar cuánto vale el polinomio en los valores que consideremos oportunos. El objetivo del juego es adivinar el polinomio con la menor cantidad de preguntas.

a. Consideremos primero una **versión simplificada** del juego, en la que sabemos que los coeficientes cumplen: $0 \leq a_i < 5$, para todo i.

i) Probar que para adivinar el polinomio basta con conocer el valor $p(5)$.

ii) Determinar el polinomio si nos dicen que $p(5) = 89$.

i) $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

tal que $a_i \in \mathbb{Z}$ tales que $0 \leq a_i < 5$

los a_i pueden tomar los valores $0, 1, 2, 3, 4$

$$p(5) = \underset{0\leq a_n\leq 4}{a_n}5^n + \underset{0\leq a_{n-1}\leq 4}{a_{n-1}}5^{n-1} + \ldots + \underset{0\leq a_2\leq 4}{a_2}5^2 + a_1 5 + a_0$$

los coeficientes del polinomio se corresponden con los "dígitos" de escribir p(5) en base 5

$$p(5) = (a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_5$$

ii) determinar el polinomio si sabemos que $p(5) = 89$

→ vamos a escribir 89 en base 5

$$89 = 5 \cdot \underline{17} + 4$$

$$= 5(5 \cdot \underline{3} + 2) + 4$$

$$= 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 \cdot 4 \cdot 5^0 \leftarrow$$

$$89 = (324)_5$$

entonces $p(x) = 3x^2 + 2x + 4$

b. Consideremos ahora la **versión general** del juego, donde solamente sabemos que los coeficientes son enteros y no negativos.

i) Supongamos que la persona elige el polinomio $p(x) = 2x^2 + 7x + 4$. Notar que $p(5) = 89$. ¿Es suficiente conocer $p(5)$ para adivinar el polinomio p? ¿Qué cambia respecto al caso anterior?

ii) Dar una estrategia que permita adivinar cualquier polinomio, en la menor cantidad de preguntas (evaluaciones). Las preguntas pueden ser todas al mismo tiempo, o de forma secuencial, luego de conocer el resultado de cualquiera de las preguntas anteriores.

i) $p(x) = 2x^2 + 7x + 4$

$$p(5) = \underbrace{2 \cdot 5^2 + 7 \cdot 5 + 4}_{\text{no es un número escrito en base 5}} = 89$$

$$p(8) = \underbrace{2 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 4} = (274)_8$$

ii) necesitamos conocer un entero que sea mayor a todos los coeficientes

$$p(x) = 13x^2 \longrightarrow p(1) = 13$$

$$p(13) = 13 \cdot 13^2 \leftarrow \text{no es base 13}$$

$$p(14) = 13 \cdot 14^2 \leftarrow \text{base 14}$$

Pregunta 1: cuánto vale $p(1)$?

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$p(1) = a_n 1^n + a_{n-1} 1^{n-1} + \dots + a_1 1 + a_0$$

$$= a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

si $p(1) = M$ tenemos $\boxed{0 \leq a_i < M+1}$

Pregunta 2: cuánto vale $p(M+1)$?

$$p(M+1) = a_n (M+1)^n + a_{n-1} (M+1)^{n-1} + \dots + a_1 (M+1) + a_0$$

$$= (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_{M+1}$$

→ para encontrar los coeficientes del polinomio hay que escribir $p(M+1)$ en base $M+1$.