Solución

Examen marzo 2025

Parte a (23 puntos)

Sean CP la carga permanente, SCU la sobrecarga de uso y V la carga de viento. La combinación persistente que considera a la sobrecarga de uso como acción principal y que no considera al viento como acción concomitante es:

$$\gamma_{CP}^{sup} \cdot CP + \gamma_{SCU}^{sup} \cdot SCU = 1.35\,CP + 1.5\,SCU \text{ (no aplican factores de combinación)}$$

Considérese una base ortonormal definida por la dirección paralela al eje de la correa (x), por la dirección paralela al eje fuerte de la sección de la correa (y), y por la dirección perpendicular a las anteriores (z). Además, sea Z la dirección paralela a la gravedad.

Sea $\alpha = \text{atan}(4.50/9.00) = \text{atan}(1/2)$ el ángulo que forman el cordón superior y el cordón inferior. Entonces, la separación proyectada en el eje z entre correas vale:

$$s = \frac{1.00\text{ m}}{\cos(\text{atan}(1/2))} = \frac{\sqrt{5}}{2}\text{ m} \cong 1.118\text{ m}$$

La carga uniformemente distribuida que actúa sobre la viga es:

$$p_{Z,d} = \left(1.35\,q_{cp} + 1.5\,q_{scu}\right) s \implies \downarrow$$

$$p_{Z,d} \cong (1.35 \cdot 0.6 + 1.5 \cdot 0.4) \cdot 1.118\ \text{kN/m} \cong 1.576\ \text{kN/m}$$

Esta carga se puede descomponer según los ejes principales de la correa:

$$\begin{cases} p_{y,d} = p_{Z,d}\cos(\text{atan}(1/2)) \implies p_{y,d} = 1.410\ \text{kN/m} \\ p_{z,d} = p_{Z,d}\sin(\text{atan}(1/2)) \implies p_{z,d} = 0.705\ \text{kN/m} \end{cases}$$

La condición de borde de las correas es de apoyos simples en los dos extremos, por lo que los momentos flectores se hallan de forma simple según:

$$\begin{cases} M_{y,d} = \dfrac{p_{z,d}\,L^2}{8} \implies M_{y,d} = \dfrac{0.705\ \text{kN/m} \cdot (4.00\text{ m})^2}{8} = 1.41\text{ kNm} \\ M_{z,d} = \dfrac{p_{y,d}\,L^2}{8} \implies M_{z,d} = \dfrac{1.410\ \text{kN/m} \cdot (4.00\text{ m})^2}{8} = 2.82\text{ kNm} \end{cases}$$

Las correas tienen una sección de b x h = 60 x 200 mm², por lo que sus dos módulos resistentes quedan dados por:

$$\begin{cases} W_y = \dfrac{h\,b^2}{6} \implies W_y = \dfrac{200\text{ mm} \cdot (60\text{ mm})^2}{6} = 120\,000\text{ mm}^3 \\ W_z = \dfrac{b\,h^2}{6} \implies W_z = \dfrac{60\text{ mm} \cdot (200\text{ mm})^2}{6} = 400\,000\text{ mm}^3 \end{cases}$$

Entonces, las tensiones de cálculo a flexión valen:

$$\begin{cases} \sigma_{m,y,d} = \dfrac{M_{y,d}}{W_y} \implies \sigma_{m,y,d} = \dfrac{1.41 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{120\,000 \text{ mm}^3} = 11.75 \text{ MPa} \\ \sigma_{m,z,d} = \dfrac{M_{y,d}}{W_y} \implies \sigma_{m,z,d} = \dfrac{2.82 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{400\,000 \text{ mm}^3} = 7.05 \text{ MPa} \end{cases}$$

La estructura se encuentra en un ambiente cerrado, en el que la humedad relativa se mantiene entre el 40 % y el 60 %, por lo que corresponde una clase de servicio 1. Al mismo tiempo, la combinación considerada solo contempla a la sobrecarga de uso como acción variable, por lo que puede asociarse a esta una duración media. De esto se desprende que el factor de modificación vale $k_{mod} = 0.8$. Por ser madera aserrada, el factor de altura se calcula a partir de $k_h = ((150 \text{ mm})/h)^{0.2} \leq 1.3$, y vale $k_{h,y} \cong 1.201$ (eje débil) y $k_{h,z} \cong 1$ (eje fuerte). Por último, según se indica en la letra, debe considerarse un coeficiente de carga compartida $k_{sys} = 1.1$. Entonces, las resistencias de cálculo a flexión son:

$$f_{m,y,d} = k_{mod}\, k_{h,y}\, k_{sys} \frac{f_{m,k}}{\gamma_M} \implies f_{m,y,d} = 0.8 \cdot 1.201 \cdot 1.1 \frac{24}{1.3} \text{ MPa} \cong 19.514 \text{ MPa}$$

$$f_{m,z,d} = k_{mod}\, k_{h,z}\, k_{sys} \frac{f_{m,k}}{\gamma_M} \implies f_{m,y,d} = 0.8 \cdot 1 \cdot 1.1 \frac{24}{1.3} \text{ MPa} \cong 16.246 \text{ MPa}$$

Para realizar las verificaciones con inestabilidad resta obtener k_{crit}. Como la correa está simplemente apoyada, la carga es uniformemente distribuida y se aplica en el borde comprimido, se tiene el siguiente desarrollo:

$$L_{ef} = \beta_v\, L + 2\, h \implies L_{ef} = (0.95 \cdot 4000 + 2 \cdot 200) \text{ mm} = 4200 \text{ mm}$$

$$\sigma_{m,crit} = 0.78 \frac{E_{0,k}\, b^2}{L_{ef}\, h} \implies \sigma_{m,crit} \cong 0.78 \frac{7400 \cdot 60^2}{4200 \cdot 200} \text{ MPa} \cong 24.737 \text{ MPa}$$

$$\lambda_{rel,m} = \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\sigma_{m,crit}}} \implies \lambda_{rel,m} \cong \sqrt{\frac{24}{24.737}} \cong 0.985 \implies 0.75 < \lambda_{rel,m} < 1.4$$

$$k_{crit} = 1.56 - 0.75\, \lambda_{rel,m} \implies k_{crit} \cong 0.8213$$

Los coeficientes de verificación a flexión esviada con inestabilidad son:

$$k_m \cdot \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{k_{crit} \cdot f_{m,z,d}} \cong 0.7 \frac{11.75}{19.514} + \frac{7.05}{0.8213 \cdot 16.246} \cong 0.950 \leq 1$$

$$\frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \cong \frac{11.75}{19.514} + 0.7 \frac{7.05}{16.246} \cong 0.906 \leq 1$$

El coeficiente de verificación máximo es 0.950, por lo que la correa verifica a flexión esviada con inestabilidad bajo las hipótesis indicadas en la letra.

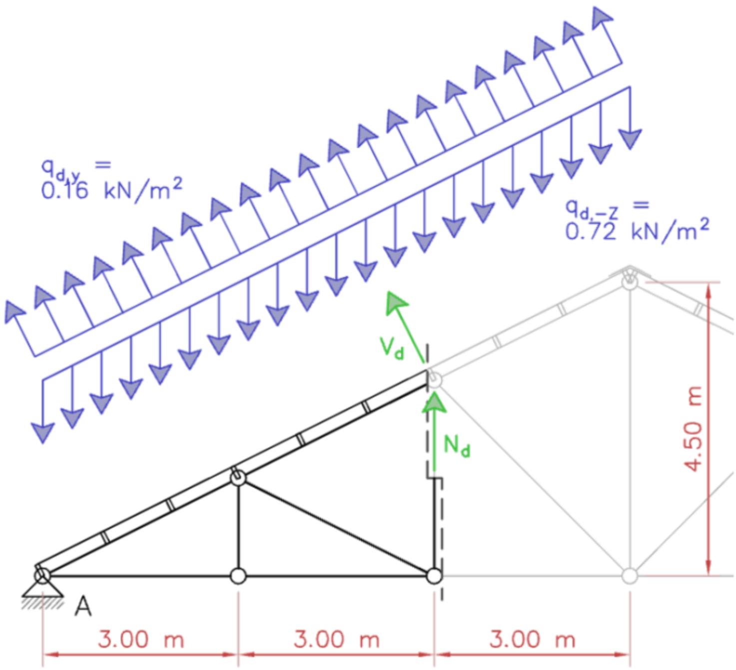
Parte b (23 puntos)

La combinación accidental de incendio que considera al viento como acción principal y a la sobrecarga de uso como acción concomitante es:

$$CP + \psi_2^{SCU} \cdot SCU + \psi_1^V \cdot V = CP + 0.3\,SCU + 0.2\,V$$

Por lo tanto, sobre la estructura puede considerarse que actúan dos cargas: una carga uniformemente distribuida en la dirección gravitatoria y de valor $q_{d,-z} = q_{cp} + 0.3\,q_{scu} \implies q_{d,-z} = (0.6 + 0.3 \cdot 0.4)\,\mathrm{kN/m^2} = 0.72\ \mathrm{kN/m^2}$, y una carga uniformemente distribuida de succión y de valor $q_{d,y} = 0.2\,q_v \implies q_{d,y} = 0.2 \cdot 0.8\ \mathrm{kN/m^2} = 0.16\ \mathrm{kN/m^2}$.

Para resolver la estructura se considera el esquema de la figura. Nótese que planteando equilibrio de momentos en el nodo A solo intervienen las fuerzas aplicadas, la directa en el montante (N_d) y el cortante en el cordón superior (V_d).



El cortante V_d puede hallarse simplemente aislando la segunda barra del cordón superior. Planteando equilibrio de fuerzas se tiene que:

$$V_d = \frac{3}{2}\left(q_{d,-z}\cos(\mathrm{atan}(1/2)) - q_{d,y}\right) s\,L \implies \hookleftarrow$$

$$V_d \cong \frac{3}{2}\left(0.72 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - 0.16\right) \cdot 1.118 \cdot 4.00\ \mathrm{kN} \cong 3.247\ \mathrm{kN}$$

Luego, planteando equilibrio de momentos en el nodo A se halla N_d:

$$N_d \cdot 6\ \mathrm{m} = 6\,q_{d,-z}\,s\,L \cdot 3\ \mathrm{m} - 6\,q_{d,y}\,s\,L \cdot \frac{3\ \mathrm{m}}{\cos(\mathrm{atan}(1/2))} - V_d \cdot \frac{6\ \mathrm{m}}{\cos(\mathrm{atan}(1/2))} \implies \hookleftarrow$$

$$N_d = 3\,q_{d,-z}\,s\,L - \frac{3\sqrt{5}}{2} q_{d,y}\,s\,L - \frac{\sqrt{5}}{2} V_d = \left(3\,q_{d,-z} - \frac{3\sqrt{5}}{2}\,q_{d,y}\right) s\,L - \frac{\sqrt{5}}{2} V_d \implies \hookleftarrow$$

$$N_d \cong \left(\left(3 \cdot 0.72 - \frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot 0.16\right) 1.118 \cdot 4.00 - \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 3.247\right) \mathrm{kN} \cong 3.630 \mathrm{~kN}$$

Nótese que $N_d > 0$, por lo que el montante se encuentra traccionado[1] para la combinación indicada. Se procede entonces a realizar la verificación a tracción en situación de incendio.

Como la pieza es de conífera y madera laminada encolada con densidad característica mayor a $\rho_k = 290$ kN/m^3, se tiene que la velocidad de carbonización nominal es $\beta_n = 0.7$ mm/min. Luego, como el tiempo de exposición a fuego ($t_{fi} = 30$ min) es mayor a 20 minutos, se tiene que la profundidad de carbonización efectiva es:

$$d_{ef} = \beta_n \, t_{fi} + 7 \mathrm{~mm} \implies d_{ef} = 28 \mathrm{~mm}$$

Dadas las caras y cantos expuestos, el ancho, canto y área de la sección eficaz valen:

$$b_{ef} = b - 2\, d_{ef} \implies b_{ef} = (120 - 2 \cdot 28) \mathrm{~mm} = 64 \mathrm{~mm}$$

$$h_{ef} = h - 2\, d_{ef} \implies h_{ef} = (120 - 2 \cdot 28) \mathrm{~mm} = 64 \mathrm{~mm}$$

$$A_{ef} = b_{ef}\, h_{ef} \implies A_{ef} = 64 \cdot 144 \mathrm{~mm}^2 = 4096 \mathrm{~mm}^2$$

Entonces, la tensión de cálculo a tracción queda dada por:

$$\sigma_{t,0,d} = \frac{N_d}{A_{ef}} \implies \sigma_{t,0,d} \cong \frac{3630 \mathrm{~N}}{4096 \mathrm{~mm}^2} = 0.886 \mathrm{~MPa}$$

Al ser verificación de incendio, todos los coeficientes modificadores se consideran iguales a la unidad. Asimismo, $\gamma_M = 1$ y $k_{fi} = 1.15$ por ser madera laminada encolada. Entonces:

$$f_{t,0,d} = k_{fi} \frac{f_{v,k}}{\gamma_M} \implies f_{v,d} \cong 1.15 \cdot \frac{16.50}{1} \mathrm{~MPa} = 18.975 \mathrm{~MPa}$$

El coeficiente de verificación[2] se calcula simplemente a partir de:

$$\frac{\sigma_{t,0,d}}{f_{t,0,d}} \cong \frac{0.886}{18.975} \cong 0.047 \cong 4.7 \% \leq 1$$

Parte c (14 puntos)

La combinación persistente que considera a la sobrecarga de uso como acción principal y al viento como acción concomitante es:

$$\gamma_{CP}^{sup} \cdot CP + \gamma_{SCU}^{sup} \cdot SCU + \gamma_V^{sup} \cdot \psi_0^V \cdot V = 1.35\, CP + 1.5\, SCU + 1.5 \cdot 0.6 \cdot V$$

[1] Por un error de copia de la letra de otro ejercicio, en la letra original se pedía la verificación a compresión con inestabilidad del elemento, en vez de simplemente a directa. Por este motivo, en la corrección se consideraron correctas las dos verificaciones, si bien corresponde la de tracción.
[2] Si el elemento estuviera comprimido, el coeficiente de verificación valdría 22.8 % ($k_c = 0.141$).

Por lo tanto, sobre la estructura puede considerarse que actúan dos cargas: una carga uniformemente distribuida en la dirección gravitatoria y de valor $q_{d,-Z} = 1.35\, q_{cp} + 1.5\, q_{scu} \Rightarrow q_{d,-Z} = (1.35 \cdot 0.6 + 1.5 \cdot 0.4)\,\mathrm{kN/m^2} = 1.41\ \mathrm{kN/m^2}$, y una carga uniformemente distribuida de succión y de valor $q_{d,y} = 0.9\, q_v \Rightarrow q_{d,y} = 0.9 \cdot 0.8\ \mathrm{kN/m^2} = 0.72\ \mathrm{kN/m^2}$.

Como uno de los apoyos es deslizante, la reacción horizontal en el nodo A es nula. Por su parte, la rección vertical puede hallarse planteando equilibrio vertical:

$$R_d = 9\left(q_{d,-Z} - q_{d,y}\cos(\mathrm{atan}(1/2))\right)\, s\, L \Rightarrow \downarrow$$

$$R_d = 9\left(1.41 - 0.72\,\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot 1.118 \cdot 4.00\, kN \cong 30.83\ \mathrm{kN}$$

La fuerza horizontal que resiste el cogote se haya por equilibrio del nudo A:

$$F_d = \frac{R_d}{\tan(\mathrm{atan}(1/2))} = 2\, R_d \Rightarrow F_d \cong 2 \cdot 30.83\ \mathrm{kN} \cong 61.66\ \mathrm{kN}$$

La tensión de cálculo rasante (τ_d) y la resistencia a tensión rasante ($f_{v,d}$) se calculan según las siguientes ecuaciones. Luego haciendo $\tau_d = f_{v,d}$:

$$\begin{cases} \tau_d = \dfrac{F_d}{a\, b} \\ f_{v,d} = k_{mod}\, \dfrac{f_{v,k}}{\gamma_M} \end{cases} \Rightarrow \frac{F_d}{a_{min}\, b} = k_{mod}\, \frac{f_{v,k}}{\gamma_M} \Rightarrow a_{min} = \frac{\gamma_M\, F_d}{k_{mod}\, b\, f_{v,k}}$$

En la anterior ecuación se tienen los siguientes valores:

- $\gamma_M = 1.25$, por ser madera laminada encolada.
- $k_{mod} = 0.9$, por ser clase de servicio 1 y duración corta (combinación con viento).
- $b = 120$ mm, ancho de la sección dado por la letra.
- $f_{v,k} = 2.7$ MPa, por ser GL24h (según CTE).

Entonces, sustituyendo en la ecuación, $a_{min} \cong 264$ mm.

El ancho mínimo del apoyo se puede calcular similarmente, pero realizando la verificación de compresión perpendicular a la fibra. Se impone entonces que $\sigma_{c,90,d} = k_{c,90}\, f_{c,90,d}$:

$$\begin{cases} \sigma_{c,90,d} = \dfrac{R_d}{A_{ef}} \\ f_{c,90,d} = k_{mod}\, \dfrac{f_{c,90,k}}{\gamma_M} \end{cases} \Rightarrow \frac{R_d}{A_{ef,min}} = k_{c,90}\, k_{mod}\, \frac{f_{c,90,k}}{\gamma_M} \Rightarrow A_{ef,min} = \frac{\gamma_M\, R_d}{k_{c,90}\, k_{mod}\, f_{c,90,k}}$$

En la anterior ecuación se tienen los siguientes valores:

- $k_{c,90} = 1$, porque se trata de una pieza sobre apoyos aislados en la que no se cumple la condición de que $l_1 \geq 2\, h$ (la descarga del cordón superior se superpone a lo largo de la barra con la descarga del apoyo a diseñar).
- $f_{c,90,k} = 2.7$ MPa, por ser GL24h (según CTE).

Entonces, sustituyendo en la ecuación, $A_{ef,min} \cong 15\,859$ mm^2. Como el ancho del apoyo es $b = 120$ mm, entonces $l_{ef,min} \cong 132$ mm, donde $l_{ef,min}$ se calcula según:

$$l_{ef,min} = l + \min\left(30\text{ mm}, l, l_{1,izq}\right) + \min\left(30\text{ mm}, l, l_{1,der}\right) \Longrightarrow ↲$$

$$l_{ef,min} = l + \min\left(30\text{ mm}, l, a - \frac{l}{2}\right) + \min(30\text{ mm}, l, 0\text{ mm}) = l + \min\left(30\text{ mm}, l, a - \frac{l}{2}\right)$$

Suponiendo que $l \geq 30$ mm y que $a - l/2 \geq 30$ mm, se tiene que $\min(30\text{ mm}, l, a - l/2) = 30$ mm, por lo que $l = 102$ mm. Nótese que este valor cumple con las dos suposiciones, ya que $l = 102$ mm ≥ 30 mm, y $a - l/2 = 264$ mm $- 51$ mm $= 213$ mm ≥ 30 mm.