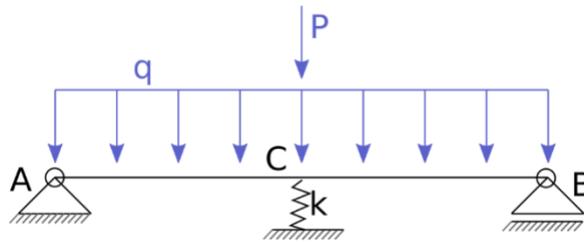


Solución

Examen febrero 2025

## Parte introductoria

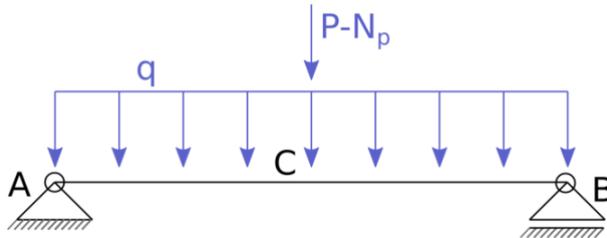
Previo a resolver las partes del ejercicio se analiza la viga para una carga distribuida y puntual genéricas, para luego utilizar estos resultados en el resto del ejercicio. Dada la geometría de la estructura, el esquema básico de cálculo para la viga es el siguiente:



En el modelo, la constante del resorte  $k$  es la rigidez a directa del pilar, calculable según:

$$k = \frac{E_{0,medio,D18} A_p}{L_p} \cong 96 \text{ kN/mm}$$

donde  $E_{0,medio,D18} = 10\,000$  MPa según el CTE,  $A_p = 24\,000$  mm<sup>2</sup> y  $L_p = 2.50$  m. De hallar  $N_p$ , la directa del pilar, positiva de compresión, el esquema se transforma en:



Esta última estructura es una viga simplemente apoyada, por lo que sus diagramas de sollicitaciones son conocidos. Resta entonces calcular  $N_p$  para cargas  $q$  y  $P$  genéricas.

La flecha en C, asociada a cargas distribuidas, se calcula según:

$$\delta_{c,dist} = q f_{dist}$$

donde  $f_{dist}$  es la flexibilidad de la viga a cargas distribuidas y toma, incluyendo las deformaciones por corte, la expresión:

$$f_{dist} = \frac{5}{384} \frac{L_v^4}{E_{0,medio,GL24h} I_v} \left( 1 + \frac{24}{25} \left( \frac{h_v}{L_v} \right)^2 \frac{E_{0,medio,GL24h}}{G_{0,medio,GL24h}} \right) \cong 0.0187 \text{ mm/(kN/m)}$$

## Estructuras de madera

donde el resultado numérico surge de los siguientes parámetros:

- $E_{0,medio,GL24h} = 11\ 600$  MPa según el CTE
- $G_{0,medio,GL24h} = 720$  MPa según el CTE
- $L_v = 1.50$  m
- $I_v = 640\ 000\ 000$  mm<sup>4</sup>
- $h_v = 400$  mm

Por otro lado, la flecha en C asociada a la carga puntual se calcula según:

$$\delta_{c,punt} = P f_{punt}$$

donde  $f_{punt}$  es la flexibilidad de la viga a cargas puntuales y toma, incluyendo las deformaciones por corte, la expresión:

$$f_{dist} = \frac{1}{48} \frac{L_v^3}{E_{0,medio,GL24h} I_v} \left( 1 + \frac{6}{5} \left( \frac{h_v}{L_v} \right)^2 \frac{E_{0,medio,GL24h}}{G_{0,medio,GL24h}} \right) \cong 0.0224 \text{ mm/kN}$$

Luego, para la estructura de la segunda figura la flecha en C es:

$$\delta_C = q f_{dist} + (P - N_p) f_{punt}$$

Dada la holgura especificada en la letra, el resorte de la primer figura recién comienza a actuar si la flecha en C es mayor a  $holg = 0.5$  mm. Por lo tanto, la ecuación del resorte, válida solamente si  $\delta_C \geq holg$ , es:

$$N_p = k (\delta_C + holg) \Rightarrow \delta_C = \frac{N_p}{k} + holg$$

Sustituyendo en la ecuación de la flecha y despejando:

$$N_p = \frac{q f_{dist} + P f_{punt} - holg}{\left( \frac{1}{k} + f_{punt} \right)}$$

Aunque la anterior ecuación es solo válida para  $\delta_C \geq holg$ , esta restricción se puede levantar si se limita el valor mínimo de la directa del pilar a 0 (directa positiva, que ocurre únicamente luego del contacto). Por lo tanto,  $N_p$  cumple la siguiente ecuación:

$$N_p = \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{q f_{dist} + P f_{punt} - holg}{\left( \frac{1}{k} + f_{punt} \right)} \\ 0 \end{array} \right.$$

Resuelta la directa del pilar, se utiliza el segundo esquema básico de cálculo para obtener cualquier sollicitación sobre la viga.

## Parte a (20 puntos)

Sean  $CP$  la carga permanente,  $SCU$  la sobrecarga de uso y  $V$  la carga de viento. La combinación accidental con la sobrecarga de uso como acción principal y el viento como acción concomitante definida en el CTE es:

$$CP + \psi_1^{SCU} \cdot SCU + \psi_2^V \cdot V = CP + 0.5 \cdot SCU + 0 \cdot V = CP + 0.5 \cdot SCU$$

Por lo tanto, para la combinación de interés se tiene una carga distribuida  $q = 40$  kN/m y una carga puntual  $P = 10$  kN. Utilizando la ecuación de la directa del pilar se tiene:

$$N_p \cong \max \left\{ \begin{array}{l} 14.32 \text{ kN} \\ 0 \end{array} \right. \cong 14.32 \text{ kN}$$

A partir de dicha directa, el cortante máximo sobre la viga es:

$$V_d = \frac{q L_v}{2} + \frac{(P - N_p)}{2} \cong 27.84 \text{ kN}$$

Dado que la viga se conforma de madera laminada encolada de conífera, con densidad característica mayor a 270 kg/m<sup>3</sup>, la velocidad de carbonización ficticia es  $\beta_n = 0.7$  mm/min. Luego, teniendo en cuenta que el tiempo de exposición al fuego es mayor a 20 minutos, la profundidad de carbonización efectiva es:

$$d_{ef} = \beta_n t + 7 \text{ mm} = 28 \text{ mm}$$

Según la letra del ejercicio, la viga está expuesta en sus dos caras y en el canto inferior, por lo que el ancho y el canto efectivos son:

$$\begin{cases} h_{ef} = h - d_{ef} = 372 \text{ mm} \\ b_{ef} = b - 2d_{ef} = 64 \text{ mm} \end{cases}$$

Finalmente la tensión de diseño a cortante es:

$$\tau_d = \frac{1.5 V_d}{k_{cr} b_{ef} h_{ef}} = \frac{1.5 \cdot 27.84 \text{ kN}}{0.67 \cdot 64 \text{ mm} \cdot 372 \text{ mm}} \cong 2.618 \text{ MPa}$$

donde  $k_{cr} = 0.67$  por tratarse de madera laminada encolada.

En lo referente al término resistente, por tratarse de combinación de incendio y madera laminada encolada GL24h se tienen los siguientes parámetros:

- $k_{mod,fi} = 1.0$
- $\gamma_{m,fi} = 1.0$
- $f_{v,k} = 2.7 \text{ MPa}$
- $k_{fi} = 1.15$

Luego la resistencia a cortante es:

$$f_{v,d} = \frac{k_{mod,fi} k_{fi} f_{v,k}}{\gamma_{m,fi}} = 3.105 \text{ MPa}$$

Finalmente, el coeficiente de verificación resulta:

$$\frac{\tau_d}{f_{v,d}} \cong \frac{2.618}{3.105} \cong 84.3 \%$$

Parte b (25 puntos)

Según el CTE, la combinación de estado límite último en situación persistente en la cual la SCU es la acción principal y el viento es concomitante es:

$$\gamma_{CP}^{sup} \cdot CP + \gamma_{SCU}^{sup} \cdot SCU + \gamma_V^{sup} \cdot \psi_0^V \cdot V = 1.35 CP + 1.5 SCU + 1.5 \cdot 0.6 \cdot V$$

Por lo tanto, para la combinación de interés se tiene una carga distribuida  $q = 54$  kN/m y una carga puntual  $P = 30$  kN. Utilizando la ecuación de la directa del pilar se tiene:

$$N_d \cong \max \left\{ \begin{array}{l} 35.95 \text{ kN} \\ 0 \end{array} \right. \cong 35.95 \text{ kN}$$

Frente al viento el pilar se comporta como una viga simplemente apoyada. Por lo tanto, el momento en el pilar asociado al viento es:

$$M_d = \frac{q_v L_p^2}{8} = \frac{7.2 \text{ kN/m} \cdot (2.50 \text{ m})^2}{8} = 5.625 \text{ kNm}$$

Notando que el pilar recibe al viento flectando según su plano fuerte se tiene  $W = 800\,000$  mm<sup>3</sup>. Luego, las tensiones de diseño son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_N = \frac{N}{A} \cong \frac{35.95 \text{ kN}}{24\,000 \text{ mm}^2} \cong 1.498 \text{ MPa} \\ \sigma_{M,y} = \frac{M}{W} = \frac{5.625 \text{ kNm}}{800\,000 \text{ mm}^3} \cong 7.031 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

Para verificar el pilar a flexocompresión con inestabilidad, notando que no puede darse vuelco lateral por la letra, y que solamente existe flexión en el eje fuerte, se deben verificar las siguientes dos inecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_N}{k_{crit,y} f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_M}{f_{m,y,d}} \leq 1 \\ \frac{\sigma_N}{k_{crit,z} f_{c,0,d}} + k_m \frac{\sigma_M}{f_{m,y,d}} \leq 1 \end{array} \right.$$

donde  $k_m = 0.7$  por ser una sección rectangular,  $f_{c,0,d}$  y  $f_{m,y,d}$  son las resistencias de diseño a compresión paralela a la fibra y a la flexión según el eje fuerte, respectivamente, y  $k_{crit,y}$  y  $k_{crit,z}$  son los coeficientes de disminución de la resistencia por pandeo según los ejes fuerte y débil, respectivamente. Nótese que es necesario estudiar ambos planos aunque la longitud de pandeo sea la misma, puesto que en el plano fuerte la flexión es mayor aunque sea menos propenso al pandeo.

Notando que, según la letra, la estructura está protegida y por lo tanto su clase de servicio (CS) es 1, se tienen los siguientes parámetros:

## Estructuras de madera

- $k_{mod} = 0.9$  por ser corta la duración de la combinación y tener CS 1.
- $k_{sys} = 1$  por ser único el pilar.
- $\gamma_m = 1.3$  por ser madera aserrada.
- $k_h = 1.0$  por ser  $h > 150$  mm. Nótese que en el plano de flexión  $h = 200$  mm.
- $f_{c,0,d} = f_{m,y,d} = 18$  MPa por ser D18.

Entonces  $f_{m,y,d} = f_{c,0,d} \cong 12.46$  MPa.

Para el pandeo según el eje fuerte no se tiene efectos de sección compuesta por lo tanto la esbeltez se calcula de forma tradicional. La inercia en este plano es  $I_y = 80\,000\,000$  mm<sup>4</sup> por lo que el radio de giro es:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{80\,000\,000 \text{ mm}^4}{24\,000 \text{ mm}^2}} \cong 57.73 \text{ mm}$$

Luego, en base a los arriostramientos especificados en la letra, la longitud de pandeo coincide con la longitud del pilar y la esbeltez es:

$$\lambda_y = \frac{L_p}{i_y} \cong \frac{2500}{57.73} \cong 43.305$$

Notando que  $E_{0,k} = 8\,400$  MPa, la tensión crítica de pandeo según el eje fuerte es:

$$\sigma_{crit,y} = \frac{\pi^2 E_{0,k}}{\lambda_y^2} = 44.21 \text{ MPa}$$

Luego, se tiene que la esbeltez relativa según el eje fuerte es:

$$\lambda_{rel,y} = \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{\sigma_{crit,y}}} \cong \sqrt{\frac{18}{44.21}} \cong 0.638$$

Al ser la esbeltez relativa mayor a 0.3, aplica el cálculo por inestabilidad. Luego, notando que  $\beta_c = 0.2$  por tratarse de madera aserrada, se tiene que el coeficiente de disminución de la resistencia por pandeo según el eje fuerte es:

$$k_{crit,y} = 0.904$$

Para el pandeo según el eje débil sí se debe considerar efectos de pilar compuesto, ya que en este plano los conectores (los cuales no son perfectamente rígidos) deben transmitir cortante. La esbeltez efectiva se calcula según:

$$\lambda_{ef,z} = \sqrt{\lambda_z^2 + \eta \frac{n}{2} \lambda_1^2}$$

Para calcular la esbeltez según el plano débil, se nota que la inercia para este plano es:

$$I_z = 2 \frac{h_p b_p^3}{12} + 2 h_p b_p \left(\frac{S}{2}\right)^2 = 201\,600\,000 \text{ mm}^4$$

## Estructuras de madera

donde  $h_p = 200$  mm es el canto de los cordones del pilar,  $b = 60$  mm es el espesor de cada cordón del pilar y  $s = 180$  mm es la separación entre los ejes de los cordones del pilar. Luego, el radio de giro según este plano es:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{201\,600\,000\text{ mm}^4}{24\,000\text{ mm}^2}} \cong 91.65\text{ mm}$$

Por lo que la esbeltez, sin efectos de pilar compuesto, para este plano es:

$$\lambda_z = \frac{L_p}{i_z} = \frac{2500}{91.65} = 27.277$$

Por otro lado,  $\eta = 2.5$  por ser una unión con pernos y una combinación de carga de duración corta,  $n = 2$  por ser dos cordones y  $\lambda_1$  cumple:

$$\lambda_1 = \max \left\{ \frac{30}{\sqrt{12}} \frac{l_1}{b_p} \Rightarrow \lambda_1 \cong 36.08 \right.$$

donde  $l_1 = 625$  mm es la separación entre conectores.

Finalmente, la esbeltez efectiva según este plano es:

$$\lambda_{ef,z} = 63.23$$

Realizando cuentas análogas a las del plano fuerte, se tiene que el coeficiente de disminución de la resistencia por pandeo según el eje débil es:

$$k_{crit,z} = 0.740$$

Sustituyendo en las ecuaciones a verificar se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_N}{k_{crit,y} f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_M}{f_{m,y,d}} \cong 0.133 + 0.564 = 0.697 \\ \frac{\sigma_N}{k_{crit,z} f_{c,0,d}} + k_m \cdot \frac{\sigma_M}{f_{m,y,d}} \cong 0.162 + 0.395 = 0.557 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, el coeficiente de verificación a flexocompresión con inestabilidad en el pilar, para la combinación planteada, es de 69.7 %.

### Parte c (20 puntos)

La combinación de estado límite último en situación persistente en la cual se minimizan las cargas gravitatorias y el viento es la acción principal es según el CTE:

$$\gamma_{CP}^{inf} \cdot CP + \psi_0^{SCU} \cdot \gamma_{SCU}^{inf} \cdot SCU + \gamma_V^{sup} \cdot V = 0.8 CP + 1.5 V$$

Por lo tanto, para la combinación de interés, sobre la viga únicamente se tiene una carga distribuida  $q = 32$  kN/m. Empleando la ecuación de la directa del pilar se obtiene:

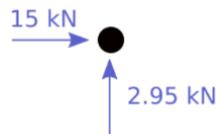
Estructuras de madera

$$N_d \cong \max \left\{ \begin{array}{l} 2.95 \text{ kN} \\ 0 \end{array} \right. \cong 2.95 \text{ kN}$$

Frente al viento el pilar se comporta como una viga simplemente apoyada. Por lo tanto, el cortante en el pilar asociado al viento es:

$$V_d = \frac{q_v L_p}{2} = \frac{12 \text{ kN/m} \cdot 2.50 \text{ m}}{2} = 15 \text{ kN}$$

Luego, las fuerzas sobre la unión son según la siguiente figura:



La fuerza total en la unión es:

$$F_{tot,d} = \sqrt{V_d^2 + N_d^2} \cong 15.287 \text{ kN}$$

Notando que, según el CTE, las densidades características son:

- $\rho_k = 380 \text{ kg/m}^3$  para viga (GL24h)
- $\rho_k = 500 \text{ kg/m}^3$  para el pilar (D18)

Notando además que el diámetro del perno es  $d = 16 \text{ mm}$  por letra y que la resistencia característica al aplastamiento paralelo a la fibra es:

$$f_{h,0,k} = 0.082 (1 - 0.01d) \rho_k$$

Se tiene que:

- $f_{h,0,k} \cong 26.17 \text{ MPa}$  para la viga
- $f_{h,0,k} \cong 34.44 \text{ MPa}$  para el pilar

La resistencia característica al aplastamiento según un ángulo  $\alpha$  respecto a la fibra es:

$$f_{h,\alpha,k} = \frac{f_{h,0,k}}{k_{90} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$$

El coeficiente  $k_{90}$  es:

- Para el pilar  $k_{90,1} = 0.9 + 0.015 d = 1.14$  por ser frondosa
- Para la viga  $k_{90,2} = 1.35 + 0.015 d = 1.59$  por ser conífera

Y los ángulos son:

- Para el pilar  $\alpha_1 = \tan^{-1} \left( \frac{V_d}{N_d} \right) = 78.80^\circ$
- Para la viga  $\alpha_2 = \tan^{-1} \left( \frac{N_d}{V_d} \right) = 11.20^\circ$

## Estructuras de madera

Finalmente, según la dirección de la fuerza total, las resistencias características al aplastamiento son:

- Para el pilar:  $f_{h,1,k} = 30.36$  MPa
- Para la viga:  $f_{h,2,k} = 25.61$  MPa
- $\beta = \frac{f_{h,2,k}}{f_{h,1,k}} = 0.843$

Los espesores en la verificación de unión de doble cortadura madera-madera son:

- Para el pilar  $t_1 = 60$  mm.
- Para la viga  $t_2 = 120$  mm.

El momento de plastificación característico del perno, dado que tiene una resistencia característica a tracción de  $f_{u,k} = 800$  MPa, es:

$$M_{y,Rk} = 0.3 f_{u,k} d^{2.6} \cong 324\,282 \text{ Nmm}$$

Luego, al ser una unión de doble cortadura madera-madera, la resistencia característica de la unión es, según el CTE, la mínima de las siguientes cuatro resistencias (donde se despreció el efecto sogá según indicación de la letra)

- $F_{Rk,1} = f_{h,1,k} t_1 d \cong 29.15$  kN
- $F_{Rk,2} = 0.5 f_{h,2,k} t_2 d \cong 24.58$  kN
- $F_{Rk,3} = 1.05 \frac{f_{h,1,k} t_1 d}{2+\beta} \left( \sqrt{2\beta(1+\beta) + \frac{4\beta(2+\beta)M_{y,Rk}}{f_{h,1,k} d t_1^2}} - \beta \right) \cong 14.44$  kN
- $F_{Rk,4} = 1.15 \sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}} \sqrt{2 M_{y,Rk} f_{h,1,k} d} \cong 19.18$  kN

Por lo tanto, la resistencia característica de la unión es  $F_{Rk} = F_{Rk,3} = 14.44$  kN. Luego la resistencia de diseño, notando que son dos planos de corte para llevar la fuerza total, es:

$$F_{Rd} = 2 \frac{F_{Rk}}{\gamma_m} k_{mod} = 2 \frac{14.44 \text{ kN}}{1.3} 0.9 = 19.99 \text{ kN}$$

Donde  $\gamma_m = 1.3$  por ser una unión y  $k_{mod} = 0.9$  por ser CS 1 y por ser la duración de la combinación de carga corta. Finalmente, el coeficiente de verificación es:

$$\frac{F_{tot,d}}{F_{Rd}} \cong \frac{15.287}{19.99} \cong 76.46 \%$$