

Solución

## Examen diciembre 2024

## Parte a (18 puntos)

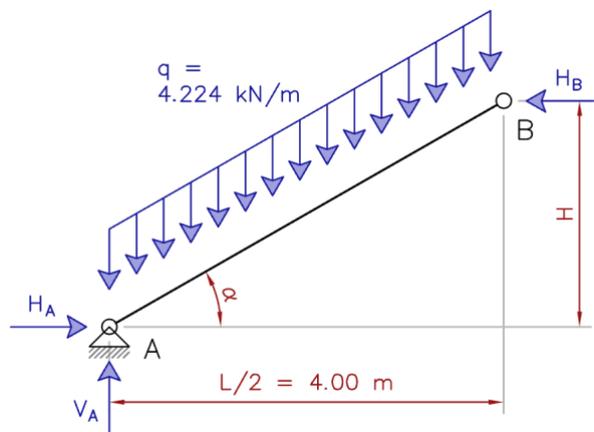
Sean  $CP$  la carga permanente,  $SCU$  la sobrecarga de uso y  $V$  la carga de viento. La combinación casi permanente definida en el CTE es:

$$CP + \psi_2^{SCU} \cdot SCU + \psi_2^V \cdot V = CP + 0.3 \cdot SCU + 0 \cdot V = CP + 0.3 \cdot SCU$$

Según lo indica la letra, la estructura está cubierta, protegida de la intemperie, y en un ambiente climatizado de humedad controlada. Es claro entonces que le corresponde una clase de uso 1 y, consecuentemente, una clase de servicio 1. A partir de la combinación definida y de  $k_{mod} = 0.6$  puede definirse una carga ficticia  $q$  a los efectos de determinar la flecha total de larga duración del nodo B.

$$q = (1 + k_{mod})(q_{cp} + 0.3 q_{scu}) \Rightarrow q = (1 + 0.6)(2.4 + 0.3 \cdot 0.8) \text{ kN/m} = 4.224 \text{ kN/m}$$

La estructura consiste en un pórtico triarticulado con los dos apoyos fijos. Por lo tanto, el descenso del nodo B se produce por el acortamiento elástico a compresión de las barras AB y BC. Como la estructura y las cargas son simétricas, el problema se puede analizar considerando una de las dos barras, por ejemplo, la AB.



Sea  $l = \sqrt{(L/2)^2 + H^2}$  el largo de la barra AB. Entonces  $\sin(\alpha) = H/l$  y  $\cos(\alpha) = L/(2l)$ . Planteando equilibrio se hallan las tres reacciones actuantes sobre la barra:

$$\begin{cases} H_A = H_B \\ V_A = q l \\ H_B H = q l \frac{L}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = H_B = \frac{q l L}{4 H} \\ V_A = q l \end{cases}$$

Proyectando las reacciones obtenidas en la dirección de la barra AB se pueden hallar las directas de compresión en los nodos A ( $N_A$ ) y B ( $N_B$ ):

## Estructuras de madera

$$\begin{cases} N_A = H_A \cos(\alpha) + V_A \sin(\alpha) \\ N_B = H_B \cos(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_A = \frac{q l L L}{4 H 2l} + q l \frac{H}{l} = \frac{q L^2}{8 H} + q H \\ N_B = \frac{q l L L}{4 H 2l} = \frac{q L^2}{8 H} \end{cases}$$

Sea  $x$  una coordenada con la dirección de la barra AB, de modo que  $x_A = 0$  y  $x_B = l$ . Entonces, sabiendo que la directa de compresión varía linealmente:

$$N(x) = \frac{q L^2}{8 H} + q H \frac{l-x}{l}$$

El acortamiento elástico a compresión de la barra AB queda dado por:

$$\Delta l = \frac{1}{EA} \int_0^l N(x) dx = \frac{1}{EA} \int_0^l \left( \frac{q L^2}{8 H} + q H \frac{l-x}{l} \right) dx$$

$$\Delta l = \frac{1}{EA} \left( \frac{q L^2}{8 H} x + q H x - \frac{q H}{2l} x^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=l} = \frac{1}{EA} \left( \frac{q l L^2}{8 H} + \frac{q l H}{2} \right)$$

A partir del acortamiento  $\Delta l$  se puede hallar el descenso del nodo B:

$$\delta_B = \frac{\Delta l}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{EA} \left( \frac{q l L^2}{8 H} + \frac{q l H}{2} \right) \frac{l}{H} = \frac{1}{EA} \left( \frac{q l^2 L^2}{8 H^2} + \frac{q l^2}{2} \right)$$

$$\delta_B = \frac{1}{EA} \frac{q l^2}{2} \left( \frac{L^2}{4 H^2} + 1 \right) = \frac{1}{EA} \frac{q l^2}{2 H^2} ((L/2)^2 + H^2) = \frac{1}{EA} \frac{q l^4}{2 H^2} = \frac{1}{EA} \frac{q ((L/2)^2 + H^2)^2}{2 H^2}$$

Finalmente, igualando al desplazamiento indicado en la letra y resolviendo:

$$\delta_B = \frac{1}{EA} \frac{q ((L/2)^2 + H^2)^2}{2 H^2} = \frac{L}{300}$$

$$H^4 + 2 \left( \frac{L}{2} \right)^2 H^2 + \left( \frac{L}{2} \right)^4 = \frac{EA L H^2}{150 q} \Rightarrow (H^2)^2 + \left( \frac{L^2}{2} - \frac{EA L}{150 q} \right) (H^2) + \frac{L^4}{16} = 0$$

Teniendo en cuenta que la madera es GL32h, se tienen los siguientes parámetros:

- $E = 13\,700 \text{ MPa}$
- $A = 100 \cdot 350 \text{ mm}^2 = 35\,000 \text{ mm}^2$
- $L = 8.00 \text{ m} = 8000 \text{ mm}$
- $q = 4.224 \text{ kN/m} = 4.224 \text{ N/mm}$

Sustituyendo, se llega a una ecuación numérica con cuatro soluciones reales, de las cuales solo una de ellas cumple que  $H$  es positivo y menor a 1.00 m (1000 mm).

$$(H^2)^2 - (6022.29 \cdot 10^6 \text{ m}^2)(H^2) + (256 \cdot 10^{12} \text{ m}^4) = 0$$

$$\begin{cases} H_1 = -77\,603.2 \text{ mm} \\ H_2 = -206.177 \text{ mm} \\ H_3 = 206.177 \text{ mm} \\ H_4 = 77\,603.2 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow H_{sol} = H_3 = 206 \text{ mm}$$

## Parte b (24 puntos)

Sean  $CP$  la carga permanente,  $SCU$  la sobrecarga de uso y  $V$  la carga de viento. La combinación persistente que considera la sobrecarga de uso como acción principal y el viento como acción concomitante queda definida por:

$$\gamma_{CP}^{sup} \cdot CP + \gamma_{SCU}^{sup} \cdot SCU + \gamma_V^{sup} \cdot \psi_0^V \cdot V = 1.35 CP + 1.5 SCU + 1.5 \cdot 0.6 \cdot V$$

A partir de la combinación definida, se tienen dos cargas de diseño, una actuando sobre la barra AB y la otra actuando sobre la barra BC:

$$\vec{q}_d^{AB} = 1.35 \vec{q}_{cp} + 1.5 \vec{q}_{scu} + 0.9 \vec{q}_v^{AB}$$

$$\vec{q}_d^{BC} = 1.35 \vec{q}_{cp} + 1.5 \vec{q}_{scu} + 0.9 \vec{q}_v^{BC}$$

Para analizar la estructura se consideran dos direcciones perpendiculares:  $x$ , paralela a la barra AB; e  $y$ , paralela a la barra BC. Entonces:

$$q_{d,x}^{AB} = -(1.35 q_{cp} + 1.5 q_{scu}) \sin(\alpha) \Rightarrow q_{d,x}^{AB} \cong -3.140 \text{ kN/m}$$

$$q_{d,y}^{AB} = (1.35 q_{cp} + 1.5 q_{scu}) \cos(\alpha) + 0.9 q_v^{AB} \Rightarrow q_{d,y}^{AB} \cong 4.220 \text{ kN/m}$$

$$q_{d,x}^{BC} = -(1.35 q_{cp} + 1.5 q_{scu}) \cos(\alpha) + 0.9 q_v^{BC} \Rightarrow q_{d,x}^{BC} \cong -2.600 \text{ kN/m}$$

Sea  $l = \sqrt{(L/2)^2 + H^2} = \sqrt{2} \cdot 4.00 \text{ m}$  el largo de las barras AB y BC. Nótese que ambas barras forman un ángulo recto en B, por lo que la directa en B en la barra AB es igual y opuesta al cortante en B en la barra BC:

$$V_{d,B}^{BC} = -\frac{q_{d,x}^{BC} \cdot l}{2} \Rightarrow V_{d,B}^{BC} \cong \frac{2.600 \cdot 5.657}{2} \text{ kN} \cong 7.353 \text{ kN}$$

$$N_{d,B}^{AB} = -V_{d,B}^{BC} \Rightarrow N_{d,B}^{AB} \cong -7.353 \text{ kN (compresión)}$$

Llamemos D al punto medio entre A y B, en dónde debe realizarse la verificación. Aislando el segmento DB se halla la directa en D en la barra AB:

$$N_d = N_{d,D}^{AB} = N_{d,B}^{AB} + \frac{q_{d,x}^{BC} \cdot l}{2} \Rightarrow N_d \cong \left( -7.353 - \frac{3.140 \cdot 5.657}{2} \right) \text{ kN} \cong -16.233 \text{ kN}$$

Por su parte, el momento flector en D (en la barra AB) se halla simplemente como en una viga simplemente apoyada con una carga uniformemente distribuida:

$$M_d = M_{d,D}^{AB} = \frac{q_{d,y}^{BC} \cdot l^2}{8} \Rightarrow M_d \cong \frac{4.220 \cdot 5.657}{8} \text{ kN m} \cong 16.878 \text{ kN m}$$

Conocidas las solicitaciones actuantes ( $N_d$  y  $M_d$ ), se procede a realizar la comprobación a flexocompresión con inestabilidad. Para ello, se comienza con el cálculo a compresión con inestabilidad y a flexión con inestabilidad, y por último a flexocompresión.

Sabiendo que el área es  $A = 35\,000 \text{ mm}^2$  y el módulo resistente es  $W = 2\,042 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$ , se tiene que las tensiones de cálculo a compresión paralela a la fibra y a flexión valen:

## Estructuras de madera

$$\sigma_{c,0,d} = \frac{|N_d|}{A} \Rightarrow \sigma_{c,0,d} \cong \frac{16\,233}{35\,000} \text{ MPa} \cong 0.464 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{m,d} = \frac{|M_d|}{W} \Rightarrow \sigma_{m,d} \cong \frac{16\,878 \cdot 10^3}{2\,042 \cdot 10^3} \text{ MPa} \cong 8.267 \text{ MPa}$$

En la letra no se indica que sean varios pórticos repetidos, por lo que el factor de carga compartida vale  $k_{sys} = 1$ . Por ser madera laminada encolada, el factor de altura se calcula a partir de  $k_h = ((600 \text{ mm})/h)^{1.1} \leq 1.1$ , y vale  $k_h \cong 1.055$ . Por último, por ser clase de servicio 1 y una combinación asociada a duración corta, el factor de modificación vale  $k_{mod} = 0.90$ . Entonces, las resistencias a compresión paralela a la fibra y a flexión son:

$$f_{c,0,d} = k_{mod} \frac{f_{c,0,k}}{\gamma_M} \Rightarrow f_{c,0,d} \cong 0.9 \frac{29}{1.25} \text{ MPa} = 20.880 \text{ MPa}$$

$$f_{m,d} = k_{mod} k_h \frac{f_{c,0,k}}{\gamma_M} \Rightarrow f_{c,0,d} \cong 0.9 \cdot 1.055 \frac{32}{1.25} \text{ MPa} \cong 24.316 \text{ MPa}$$

Para realizar las verificaciones con inestabilidad resta calcular  $k_{c,y}$ ,  $k_{c,z}$  y  $k_{crit}$ . Se obtienen primero los coeficientes de pandeo a compresión, y luego los de pandeo a flexión.

Asumiendo que la estructura se encuentra correctamente arriostrada en sus nodos fuera del plano del ejercicio, se considera a la barra AB biarticulada, por lo que la longitud de pandeo será para ambos ejes  $L_k = \sqrt{2} \cdot 4.00 \text{ m}$ . Las esbelteces entonces son:

$$\lambda_y = \frac{L_k}{i_y} = \frac{L_k \cdot \sqrt{12}}{h} \Rightarrow \lambda_y = \frac{\sqrt{2} \cdot 4000 \cdot \sqrt{12}}{350} \cong 55.99$$

$$\lambda_z = \frac{L_k}{i_z} = \frac{L_k \cdot \sqrt{12}}{b} \Rightarrow \lambda_z = \frac{\sqrt{2} \cdot 4000 \cdot \sqrt{12}}{100} \cong 195.96$$

Las esbelteces relativas son:

$$\lambda_{rel,y} = \frac{\lambda_y}{\pi} \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,k}}} \Rightarrow \lambda_{rel,y} \cong \frac{55.99}{\pi} \sqrt{\frac{29}{11\,100}} \cong 0.911$$

$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\pi} \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,k}}} \Rightarrow \lambda_{rel,z} \cong \frac{195.96}{\pi} \sqrt{\frac{29}{11\,100}} \cong 3.188$$

Luego, notando que  $\beta_c = 0.1$  por tratarse de madera laminada encolada:

$$k_y = 0.5 (1 + \beta_c (\lambda_{rel,y} - 0.3) + \lambda_{rel,y}^2) \Rightarrow k_y \cong 0.945$$

$$k_z = 0.5 (1 + \beta_c (\lambda_{rel,z} - 0.3) + \lambda_{rel,z}^2) \Rightarrow k_z \cong 5.727$$

Finalmente, los coeficientes de pandeo a compresión son:

## Estructuras de madera

$$k_{c,y} = \frac{1}{k_y + \sqrt{k_y^2 - \lambda_{rel,y}^2}} \Rightarrow k_{c,y} \cong \frac{1}{0.945 + \sqrt{0.945^2 - 0.911^2}} \cong 0.8343$$

$$k_{c,z} = \frac{1}{k_z + \sqrt{k_z^2 - \lambda_{rel,z}^2}} \Rightarrow k_{c,z} \cong \frac{1}{5.727 + \sqrt{5.727^2 - 3.188^2}} \cong 0.0954$$

De forma similar, se obtiene el coeficiente de pandeo a flexión<sup>1</sup>:

$$\sigma_{m,crit} = 0.78 \frac{E_{0,k} b^2}{L_{ef} h} \Rightarrow \sigma_{m,crit} \cong 0.78 \frac{11\,100 \cdot 100^2}{\sqrt{2} \cdot 4000 \cdot 350} \text{ MPa} \cong 43.730 \text{ MPa}$$

$$\lambda_{rel,m} = \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\sigma_{m,crit}}} \Rightarrow \lambda_{rel,m} \cong \sqrt{\frac{32}{43.730}} \cong 0.855 \Rightarrow 0.75 < \lambda_{rel,m} < 1.4$$

$$k_{crit} = 1.56 - 0.75 \lambda_{rel,m} \Rightarrow k_{crit} \cong 0.9184$$

Juntando los resultados obtenidos se hallan los coeficientes de verificación a compresión con inestabilidad y a flexión con inestabilidad:

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{\min(k_{c,y}, k_{c,z}) f_{c,0,d}} \cong \frac{0.464}{0.0954 \cdot 20.880} \cong 0.233$$

$$\frac{\sigma_{m,d}}{k_{crit} f_{m,d}} \cong \frac{8.267}{0.9184 \cdot 24.316} \cong 0.370$$

Mientras tanto, los coeficientes de verificación a flexocompresión con inestabilidad son:

$$\left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2 + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} \cong \left(\frac{0.464}{20.880}\right)^2 + \frac{8.267}{24.316} \cong 0.340$$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} \cong \frac{0.464}{0.8343 \cdot 20.880} + \frac{8.267}{24.316} \cong 0.367$$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} f_{c,0,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} \cong \frac{0.464}{0.0954 \cdot 20.880} + 0.7 \frac{8.267}{24.316} \cong 0.471$$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} f_{c,0,d}} + \left(\frac{\sigma_{m,d}}{k_{crit} f_{m,d}}\right)^2 \cong \frac{0.464}{0.0954 \cdot 20.880} + \left(\frac{8.267}{0.9184 \cdot 24.316}\right)^2 \cong 0.370$$

El coeficiente de verificación máximo es 0.471, por lo que el elemento AB verifica a flexocompresión con inestabilidad bajo las hipótesis indicadas en la letra.

<sup>1</sup> Se asume que en los nodos A y B está restringida la torsión. Adicionalmente, a falta de información, se considera que la carga se aplica en el eje de la barra AB. De este modo,  $L_{ef} = L_k$ .

## Parte c (18 puntos)

La combinación accidental de incendio que considera el viento como acción principal y la sobrecarga de uso como acción concomitante queda definida por:

$$CP + \psi_2^{SCU} \cdot SCU + \psi_1^V \cdot V = CP + 0.3 SCU + 0.3 V$$

Al igual que en la parte anterior, para analizar la estructura se consideran dos direcciones perpendiculares:  $x$ , paralela a la barra AB; e  $y$ , paralela a la barra BC. El cortante máximo en el elemento AB solo depende de la carga según  $y$  en la propia barra, por lo que:

$$\vec{q}_d = \vec{q}_{cp} + 0.3 \vec{q}_{scu} + 0.3 \vec{q}_v$$

$$q_{d,y} = (q_{cp} + 0.3 q_{scu}) \cos(\alpha) + 0.3 q_v^{AB} \Rightarrow q_{d,y} \cong 2.227 \text{ kN/m}$$

Sea  $l = \sqrt{(L/2)^2 + H^2} = \sqrt{2} \cdot 4.00 \text{ m}$  el largo de la barra AB. El cortante máximo es<sup>2</sup>:

$$V_d = \frac{q_{d,y} l}{2} \Rightarrow V_d \cong \frac{2.227 \cdot \sqrt{2} \cdot 4.00}{2} \text{ kN} \cong 6.298 \text{ kN}$$

Como la pieza es de conífera y madera laminada encolada con densidad característica mayor a  $\rho_k = 290 \text{ kN/m}^3$ , se tiene que la velocidad de carbonización nominal es  $\beta_n = 0.7 \text{ mm/min}$ . Luego, como el tiempo de exposición a fuego ( $t_{fi} = 30 \text{ min}$ ) es mayor a 20 minutos, se tiene que la profundidad de carbonización efectiva es:

$$d_{ef} = \beta_n t_{fi} + 7 \text{ mm} \Rightarrow d_{ef} = 28 \text{ mm}$$

Dadas las caras y cantos expuestos, el ancho y el canto de la sección eficaz son:

$$b_{ef} = b - 2 d_{ef} \Rightarrow b_{ef} = (100 - 2 \cdot 28) \text{ mm} = 44 \text{ mm}$$

$$h_{ef} = h - 2 d_{ef} \Rightarrow h_{ef} = (350 - 2 \cdot 28) \text{ mm} = 294 \text{ mm}$$

A los efectos de tener en cuenta la influencia de las fendas, se tiene:

$$A_{ef} = k_{cr} b_{ef} h_{ef} \Rightarrow A_{ef} = 0.67 \cdot 44 \cdot 294 \text{ mm}^2 \cong 8667 \text{ mm}^2$$

Por lo tanto, la tensión de cálculo de cortante vale:

$$\tau_d = \frac{3 V_d}{2 A_{ef}} \Rightarrow \tau_d \cong \frac{3 \cdot 6298}{2 \cdot 8667} \text{ MPa} \cong 1.090 \text{ MPa}$$

Al ser verificación de incendio, todos los coeficientes modificadores se consideran iguales a la unidad. Asimismo,  $\gamma_M = 1$  y  $k_{fi} = 1.15$  por ser madera laminada encolada. Entonces:

$$f_{v,d} = k_{fi} \frac{f_{v,k}}{\gamma_M} \Rightarrow f_{v,d} \cong 1.15 \cdot \frac{3.8}{1} \text{ MPa} = 4.370 \text{ MPa}$$

Se cumple que  $\tau_d \leq f_{v,d}$ , por lo que se comprueba la verificación indicada.

<sup>2</sup> No se desprecia parte de la carga cerca de los apoyos según lo admite la norma.