CAPITULO 4

Integración Numérica de Áreas y Volúmenes

En el análisis matemático, el teorema fundamental del cálculo establece que la derivación e integración de una función son operaciones inversas. Este concepto resulta fundamental pues habilita estudiar áreas y volúmenes como integrales de funciones derivables, a partir del enunciado del *teorema* o *Regla de Barrow*, denominada en ocasiones *Segundo teorema fundamental del cálculo*, y permite calcular la integral definida de una función continua entre dos puntos utilizando la integral indefinida o primitiva de dicha función.

Sin embargo, muchas de las funciones utilizadas carecen de primitivas, como el caso de la siguiente función:

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad [1.]$$

Su integración analítica no es posible, y por tanto tampoco el cálculo directo del área bajo su curva.

Tampoco es posible la aplicación del *Teorema de Barrow* a aquellas representaciones gráficas, curvas planas o tridimensionales, o superficies que por su naturaleza no pueden ser descritas mediante una expresión algebraica, como es el caso de aquellas definidas por las formas de la carena de un buque.

Distintas corrientes matemáticas desarrollaron métodos de aproximación al cálculo integral, los cuales se pueden denominar *Métodos de integración numérica* o *Cuadratura*. Se describirán brevemente las dos principales metodologías, incluyendo en cada una alguno de los métodos tradicionalmente utilizados para los cálculos en diseño naval.

Métodos basados en funciones de interpolación

Hay una extensa familia de métodos que se basan en aproximar la función a integrar *f(x)* por otra función *g(x)* de la cual se conoce la integral exacta. La función que sustituye la original se elige de forma que para un cierto número de puntos ambas tengan el mismo valor funcional, por lo cual la nueva función es una interpolación de la función original. Típicamente, las funciones de interpolación utilizadas son polinomios de grados diversos.

Existen dos tipos de formulaciones utilizadas para realizar los cálculos aproximados de integración de funciones: 1) las *Fórmulas de Newton – Cotes*, donde la interpolación con polinomios es evaluada en puntos igualmente separados en el intervalo $[a, b]$, de las que la *Regla de los Trapecios* y la *Regla de Simpson* son los ejemplos clásicos; 2) las fórmulas denominadas *Cuadratura de Gauss*, donde se permite variar la magnitud de los intervalos entre los puntos de interpolación.

Fórmulas de Newton-Cotes

Estas formulaciones son utilizadas para aproximar la forma de una curva cualquiera mediante interpolaciones polinómicas. El grado del polinomio utilizado dependerá de la cantidad de puntos que se consideren para forzar dicha aproximación. Las formas utilizadas se conocen como *polinomios de Lagrange*, cuya expresión general está dada por:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_i^n(x) \qquad [2.]$$

donde

$$L_i^n(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right) \qquad [3.]$$

A manera de ejemplo, la expresión de la interpolación de Lagrange para un polinomio de primer grado estará dada por el siguiente desarrollo:

$$L_0^1(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq 0}}^{1} \left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \qquad [4.]$$

$$L_1^1(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{1} \left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \qquad [5.]$$

$$p_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot f(x_1) \qquad [6.]$$

Para mejorar el grado de aproximación a una función, es necesario aumentar el número de puntos o nodos a interpolar; esto genera un aumento en el grado del polinomio interpolador, aumentando la dificultad en el cálculo, por lo cual no es usual utilizar interpolaciones más allá del cuarto grado.

También sucede que a medida que crece el grado, mayores son las oscilaciones entre puntos consecutivos o nodos. Se podría decir que a partir del grado 6 las oscilaciones son tales que el método deja de ser válido.

Regla de los trapecios

La primera interpolación que será ensayada será la que resulta a partir de un polinomio de Lagrange de primer grado, cuya forma fue desarrollada al final del párrafo anterior.

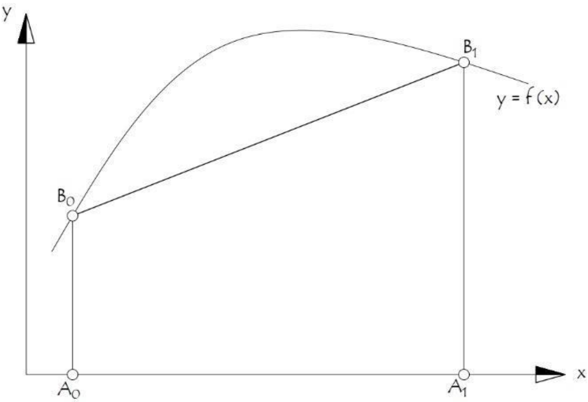

Fig. 1 - Interpolación lineal

$$p(x) = \frac{(x_1 - x)\cdot f(x_0) + (x - x_0)\cdot f(x_1)}{(x_1 - x_0)} \qquad [7.]$$

Para este polinomio, la integración entre los extremos [x_0, x_1] nos da el siguiente resultado:

$$I_{x_0}^{x_1} = (x_1 - x_0)\cdot\left[\frac{f(x_1)+f(x_0)}{2}\right] \qquad [8.]$$

Es interesante verificar cómo funciona esta aproximación para una función cualquiera, por ejemplo, $f(x) = 1/x$, para su integración en el intervalo [*1*, *2*], siendo $f(x_0) = 1.000$ y $f(x_1) = 0.500$. La integral definida de esta función tiene un valor $I_f = 0.693$. Por otro lado, se aplicará la interpolación lineal sugerida en [7.] con la cual obtenemos la ecuación $p(x) = ½.(3 – x)$; en este caso la integral correspondiente vale $I_p = 0.750$. El error cometido en la aproximación será $I_f – I_p = 0.057$.

Para refinar el método, dividamos el intervalo en dos subintervalos iguales [*1*, *1.5*] y [*1.5*, *2*], siendo en este caso siendo $f(x_1) = 1.000$, $f(x_2) = 0.667$ y $f(x_3) = 0.500$.

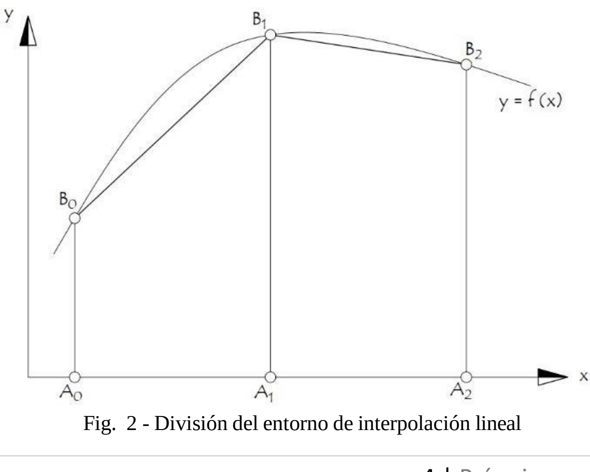

Fig. 2 - División del entorno de interpolación lineal

Obviamente la integral de la función continua en [*1*, *2*], suma de la integral en los dos subintervalos, tendrá el mismo valor que el mencionado en el párrafo anterior, I_f = *0.693*. Tendremos ahora dos funciones lineales que aproximan la curva en cada subintervalo, siendo éstas: *p'(x) = 1/3.(5 – 2x)* y *p''(x) = 1/6.(5 – 2x)*. La suma de las integrales de las funciones lineales en ambos subintervalos resulta en $I_p = I_{p'} + I_{p''}$ = *0.708*. Se observa que el error en este caso es $I_f - I_p$ = *0.015* ha disminuido significativamente.

Para obtener una formulación general que se pueda aplicar a un número cualquiera de subintervalos iguales, se considerará *n* como factor de subdivisión.

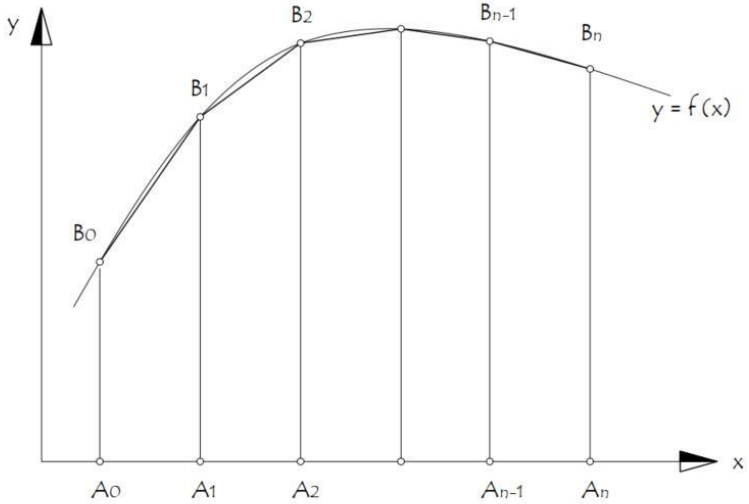

Fig. 3 - Generalización de la subdivisión lineal

El área bajo la curva en [x_0, x_n] estará representada por:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\cdot dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\cdot dx + \cdots . \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\cdot dx \qquad [9.]$$

Reiterando el procedimiento utilizado en los cálculos anteriores para uno y dos subintervalos, cada una de las integrales correspondientes a cada tramo de curva puede ser sustituida por la integral de su aproximación lineal [3.]:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cdot dx \cong \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_i(x)\cdot dx = (x_i - x_{i-1})\cdot \frac{(f(x_i)-f(x_{i-1}))}{2} \qquad [10.]$$

Teniendo en cuenta que $(x_i - x_{i-1}) = \Delta x$, $f(x_i) = y_i$ y $f(x_i - 1) = y_{i-1}$, se podrá escribir:

$$I(f(x)) \cong \Delta x\cdot \frac{y_1+y_0}{} + \Delta x\cdot \frac{y_2+y_1}{} + \cdots .. + \Delta x\cdot \frac{y_{n-2}+y_{n-1}}{} + \Delta x\cdot \frac{y_{n-1}+y_n}{} \qquad [11.]$$

2 2 2 2

La expresión anterior lleva a la formulación genérica de la *Regla de los Trapecios* para un número *n+1* de ordenadas correspondientes a *n* subintervalos de integración:

$$I(f(x)) \cong \Delta x \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots .. + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \qquad [12.]$$

con una expresión más simple escrita de la siguiente forma:

$$I(f(x)) \cong \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot \left(y_0 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n\right) \qquad [13.]$$

Ejemplo

Un ejemplo de cálculo utilizando el método de los trapecios se expone a continuación, a través del cálculo de la mitad del área de flotación de un buque, cuya forma está definida a través de sus semimangas correlativas entre las estaciones *# 0* y *# 10*, distanciadas entre sí $\Delta x = 6.650\ m$, de acuerdo con la siguiente tabla:

Tabla 1 - Semimangas de Flotación

Estación	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Semimanga	*2.02*	*5.09*	*6.06*	*6.29*	*6.32*	*6.32*	*6.28*	*6.14*	*5.06*	*2.80*	*1.30*

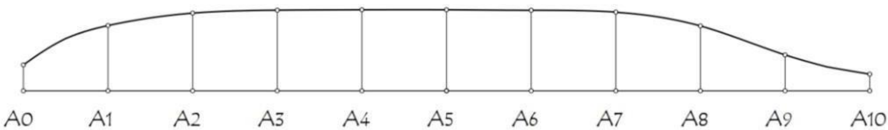

Fig. 4 - Área de Flotación

El valor de esta superficie, determinada a través de una metodología apropiada con un error marginal en relación con los métodos numéricos, es $A = 349.465\ m$.

De acuerdo con la formulación establecida en [12.], el área bajo la curva definida por la grilla de puntos dados en la tabla se puede calcular como la suma de los siguientes términos:

$A_0 = ½.6.650.2.020 = 6.717$

$A_i = ½.6.650.2.(5.090+6.060+6.290+6.320+6.320+6.280+6.140+5.060)=334.893$

$A_{10} = ½.6.650.1.300 = 4.323$

A = 345.933

El error introducido por el *Método de los Trapecios* en el cálculo de esta área en relación con el valor real del área es $\delta A = 349.465 – 345.933 = 3.532\ (1.01\%)$.

Primera Regla de Simpson o Regla de Simpson 1/3

Al igual que lo realizado para la interpolación lineal, se aproximará ahora la función original por una interpolación cuadrática que pasa por tres puntos B_1, B_2 *y* B_3 pertenecientes a la curva *f(x)*, cuyas abscisas x_1, x_2 y x_3 están ubicadas a intervalos equidistantes:

$$p(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)} \cdot f(x_0) + \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)} \cdot f(x_1) + \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)} \cdot f(x_2) \qquad [14.]$$

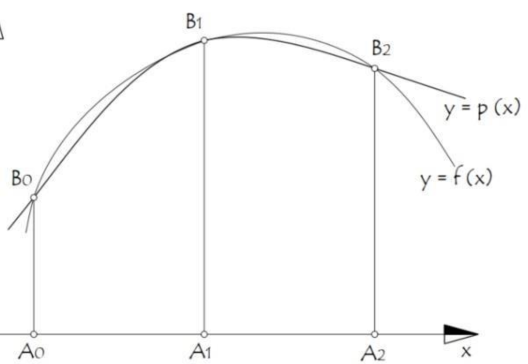

Fig. 5 - Interpolación cuadrática

Al igual que en la interpolación lineal, se calcula el área bajo la curva *y = f(x)* evaluando la integral de la aproximación polinómica *y = p(x)* de segundo grado con primitiva conocida que se puede calcular fácilmente una vez que se resuelve el sistema de ecuaciones que permite determinar los valores de los coeficientes de los términos en x_0, x_1 y x_2:

$$I(f(x)) \cong \frac{\Delta x}{3} \cdot (f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + f(x_2)) \qquad [15.]$$

Si se divide cada uno de los intervalos en dos subintervalos iguales, la integral se transformará en:

$$I(f(x)) \cong \frac{\Delta x}{3} \cdot (f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + f(x_2)) + \frac{\Delta x'}{3} \cdot (f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + f(x_4)) \qquad [16.]$$

Cuya formulación simplificada es:

$$I(f(x)) \cong \frac{\Delta x}{3} \cdot (f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2. f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + f(x_4)) \qquad [17.]$$

Lo que conduce a la formulación general de la *Regla de Simpson* para un número *n* par de intervalos correspondientes a un número impar *n+1* de ordenadas:

$$I(f(x)) \cong \frac{1}{3} \cdot \Delta x \cdot (y_0 + 4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + \cdots .. + 2 \cdot y_{n-2} + 4 \cdot y_{n-1} + y_n) \qquad [18.]$$

Una expresión más simplificada es:

$$I(f(x)) \cong \frac{1}{3} \cdot \Delta x \cdot \left(y_0 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} 2 \cdot y_{2i} + 4 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 2 \cdot y_{2i-1} + y_n\right) \qquad [19.]$$

Ejemplo

El mismo ejemplo será utilizado para analizar el valor resultante cuando se aplica el método de Simpson.

A_0 = 1/3.6.650.2.020 = 4.478

A_{2i} = 1/3.6.650.2.(6.060+6.280+6.320+5.060)=105.159

A_{2i-1} = 1/3.6.650.4.(5.090+6.290+6.320+6.140+2.800)=236.208

A_{10} = 1/3.6.650.1.300 = 2.882

A = 348.726

El error introducido para el cálculo de la misma área por el *Método de Simpson* en relación con el valor real del área es δA *= 349.465 – 348.726 = 2.219 (0.64 %)*.

Segunda Regla de Simpson o Regla de Simpson 3/8

La interpolación cúbica, forzando cuatro puntos en lugar de los tres utilizados en el método anterior, lleva a esta nueva formulación conocida como Segunda Regla de Simpson:

$$I(f(x)) \cong \frac{3}{8} \cdot \Delta x \cdot (y_1 + 3 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 + 2 \cdot y_4 + \ldots + 2 \cdot y_{n-3} + 3 \cdot y_{n-2} + 3 \cdot y_{n-1} + y_n) \qquad [20.]$$

Utilización de ordenadas intermedias

Para la mayoría de las curvas que se presentan en el desarrollo de formas en diseño naval, la división en intervalos iguales en las que se basa el método de Newton Cotes asegura una buena aproximación al cálculo de áreas.

Existen sin embargo situaciones en las cuales se hace necesario reducir el espaciamiento entre las ordenadas, pues de lo contrario se estaría introduciendo un error apreciable. Es la situación que normalmente se encuentra en las curvas que definen los extremos cercanos a proa y popa, donde las formas del casco son más pronunciadas, generándose incluso cambios en el signo de la concavidad.

Se hace necesario entonces, a los efectos de disminuir los errores de interpolación de las curvas, la subdivisión en una serie de intervalos intermedios, aplicando en éstos cualquiera de las reglas desarrolladas, no necesariamente la utilizada para la porción central o mayoritaria, teniendo presente para el cálculo que el nuevo Δx será una fracción del original.

Ejemplo

Se determinará ahora el área de la misma curva que se ha utilizado como ejemplo para analizar los resultados de los distintos métodos de cálculo, pero considerando ordenadas intermedias, una en cada extremo, las cuales han sido incorporadas en la nueva tabla de puntos:

Tabla 2 - Semimangas de Flotación con ordenadas intermedias

Estación	*0*	*½*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*9½*	*10*
Semimanga	*2.02*	*4.10*	*5.09*	*6.06*	*6.29*	*6.32*	*6.32*	*6.28*	*6.14*	*5.06*	*2.80*	*1.90*	*1.30*

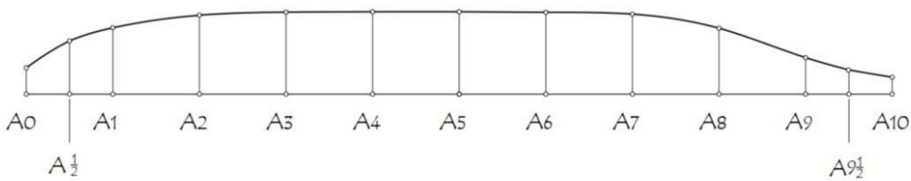

Fig. 6 - Flotación con semimangas intermedias

Método de los Trapecios; el error disminuye para el mismo método sin coordenadas intermedias, de *3.532 (1.01%)* a $\delta A = 349.465 - 347.246 = 2.219$ *(0.64 %)* con la inclusión de las dos estaciones intermedias en los extremos.

Método de Simpson; el error disminuye también en este caso pasando de *2.219 (0.64 %) a* $\delta A = 349.465 - 349.956 = -0.491$ *(0.14 %).*

Cuadratura de Gauss

El grado de precisión de los diferentes métodos de integración numérica es afectado por la elección y/o posicionamiento de los nodos de integración. Esto, junto con la necesidad de estimar el grado de precisión máxima que puede alcanzarse con un número fijo de nodos, conduce a otra metodología, la *integración gaussiana*, que introduce como mejora la teoría de *polinomios ortogonales*.

A diferencia de la interpolación mediante los métodos de *Newton – Cotes* donde se fuerza a la curva de aproximación a pasar por una serie de puntos predeterminados igualmente separados entre sí, la interpolación mediante la cuadratura de Gauss escoge los nodos de manera de maximizar su grado de precisión.

Cuadratura de Gauss – Método de Tchebycheff

Los *polinomios de Tchebycheff* son una familia de polinomios ortogonales definidos de forma recursiva, los cuales son importantes en la teoría de la aproximación porque sus raíces son utilizadas como nodos en la interpolación polinómica.

La cuadratura o integración de los polinomios de Tchebycheff, definida en un intervalo [x_0, x_n] debe transformarse mediante un apropiado cambio de variable en otra cuyo intervalo de integración es [-*1*, *1*] para su resolución.

Los pares de valores ordenados (x'_{-i}, x'_i) corresponden a las raíces del polinomio de Tchebycheff. Estas raíces, que resuelven el polinomio en el intervalo [-*1*,*1*] luego del cambio de variable, tienen los valores que se transcriben en la tabla No. 3, referenciadas respecto al centro del intervalo ubicado en $(x_n - x_0)/2$:

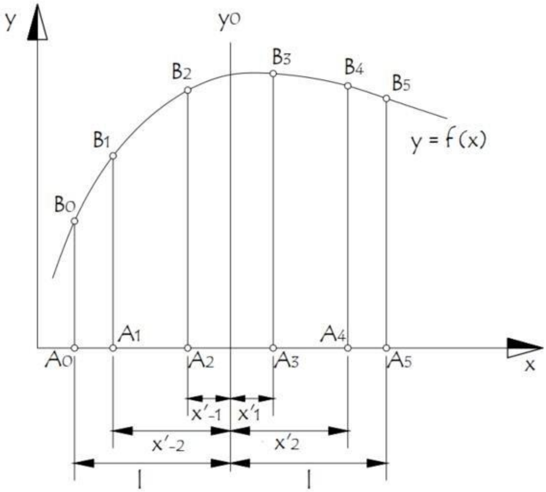

Fig. 7 - Cuadratura de Tchebycheff

Tabla 3 – Coordenadas relativas de los nodos para la interpolación de Tchebycheff

Cantidad de raíces	*Raíces o nodos*							
2	*-0,5774*	*0,5774*						
3	*-0,7071*	*0,0000*	*0,7071*					
4	*-0,7947*	*-0,1876*	*0,1876*	*0,7947*				
5	*-0,8325*	*-0,3745*	*0,0000*	*0,3745*	*0,8325*			
6	*-0,8662*	*-0,4225*	*-0,2666*	*0,2666*	*0,4225*	*0,8662*		
7	*-0,8839*	*-0,5297*	*-0,3239*	*0,0000*	*0,3239*	*0,5297*	*0,8839*	
8	*-0,8974*	*-0,5938*	*-0,4062*	*-0,1026*	*0,1026*	*0,4062*	*0,5938*	*0,8974*

La expresión del área integrada se escribe como:

$$I_f \cong 2l \cdot \frac{1}{n} \cdot (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + \cdots .. + f(x_n)) \qquad [21.]$$

donde *l* es la mitad del intervalo de integración [-*l, l*] y *n* es la cantidad de ordenadas de integración.

Ejemplo

El área de la curva que se ha utilizado para los cálculos comparativos será evaluada ahora mediante el *Método de Tchebycheff* considerando tres ordenadas.

$l = 6.650/2 = 3.375; n = 3$

$x_{ref\,-1} = -23.511; y_{-1} = 5.655$

$x_{ref\,0} = 0.000; y_0 = 6.320$

$x_{ref\,+1} = +23.511; y_{+1} = 3.883$

$A = 1/n.2l.\Sigma y = 1/3.66.500.(5.655+6.320+3.883) = 351.528$

Se alcanza una buena aproximación con pocas ordenadas, siendo el error introducido $\delta A = 349.465 - 351.528 = -2.063\ (0.59\ \%)$.

Sin embargo, no se consigue mejorar este valor aumentando las ordenadas en este caso, siendo el error *0.62%* cuando se utilizan cinco ordenadas, repitiendo el mismo error para siete ordenadas.

Cálculo de Áreas y Momentos

Metodología de cálculo

Las superficies y curvas de intersección con planos auxiliares definidas por la carena de un buque, por su propia naturaleza, son continuas y cerradas, lo que define la existencia de volúmenes y áreas finitos asociados a ellas.

En esta integración plana se considera un elemento diferencial de superficie *da* cuya ubicación en el plano está dada por el par ordenado de coordenadas (x_i, y_i) y cuya área está definida por sus dimensiones paralelas a los ejes, *dx* y *dy*.

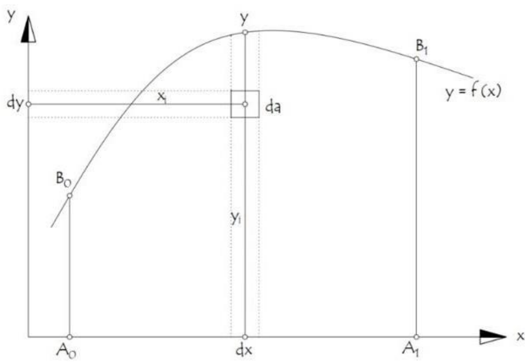

Fig. 8 - Elemento diferencial de área

Las propiedades de la superficie limitada por los ejes de referencia, la propia curva y el extremo de abscisas elegido, se pueden escribir de la siguiente manera:

Área

$$A = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y}(dy.dx) = \int_0^{x_1} y\,.dx \qquad [22.]$$

Momento de primer orden respecto al eje *Ox*

$$M_x = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_i}(y\,.dy.dx) = \frac{1}{2}\cdot\int_{x_0}^{x_1} y^2\cdot dx \qquad [23.]$$

Momento de primer orden respecto al eje *Oy*

$$M_y = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_i}(x\,.dy.dx) = \int_{x_0}^{x_1} x\,.y_i.dx \qquad [24.]$$

Momento de segundo orden respecto al eje *Ox*

$$I_x = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_i}(y^2.dy.dx) = \frac{1}{3}\cdot\int_{x_0}^{x_1} y^3\cdot dx \qquad [25.]$$

Momento de segundo orden respecto al eje *Oy*

$$I_y = \int_{x_0}^{x_1}\int_0^{y_i}(x^2.dy.dx) = \int_{x_0}^{x_1} x^2\cdot y\cdot dx \qquad [26.]$$

Posición longitudinal del centroide del área

$$x_g = \frac{\int_{x_0}^{x_1} x\cdot y\cdot dx}{\int_{x_0}^{x_1} y\cdot dx} \qquad [27.]$$

Posición transversal del centroide del área

$$y_g = \frac{\frac{1}{2}\cdot\int_{x_0}^{x_1} y^2\cdot dx}{\int_{x_0}^{x_1} y\cdot dx} \qquad [28.]$$

Cada una de estas ecuaciones puede ser tratada en forma numérica, para lo cual se deben considerar como ordenadas en cada caso particular, las cantidades que se estén integrando.

A continuación, se presenta en forma resumida las expresiones resultantes para las distintas propiedades a calcular mediante integración numérica de acuerdo con diversos métodos de integración según fue expuesto anteriormente.

Regla de trapecios

$$A = 2 \cdot \frac{s}{2} \cdot \sum(f_i \cdot y_i) \qquad [29.]$$

$$M_x = 2 \cdot \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum(f_i \cdot y_i^2) \qquad [30.]$$

$$M_y = 2 \cdot \frac{s}{2} \cdot \sum(f_i \cdot x_i \cdot y_i) = 2 \cdot \frac{s^2}{2} \cdot \sum(f_i \cdot i \cdot y_i) \qquad [31.]$$

$$I_x = 2 \cdot \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum(f_i \cdot y_i^3) \qquad [32.]$$

$$I_y = 2 \cdot \frac{s}{2} \cdot \sum(f_i \cdot x_i^2 \cdot y_i) = 2 \cdot \frac{s^3}{2} \cdot \sum(f_i \cdot i^2 \cdot y_i) \qquad [33.]$$

Primera regla de Simpson

$$A = 2 \cdot \frac{s}{3} \cdot \sum(f_i \cdot y_i) \qquad [34.]$$

$$M_x = 2 \cdot \frac{s}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum(f_i \cdot y_i^2) \qquad [35.]$$

$$M_y = 2 \cdot \frac{s}{3} \cdot \sum(f_i \cdot x_i \cdot y_i) = 2 \cdot \frac{s^2}{3} \cdot \sum(f_i \cdot i^2 \cdot y_i) \qquad [36.]$$

$$I_x = 2 \cdot \frac{s}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum(f_i \cdot y_i^3) \qquad [37.]$$

$$I_y = 2 \cdot \frac{s}{3} \cdot \sum(f_i \cdot x_i^2 \cdot y_i) = 2 \cdot \frac{s^3}{3} \cdot \sum(f_i \cdot i^2 \cdot y_i) \qquad [38.]$$

Regla de Tchebycheff

$$A = 2 \cdot c \cdot \sum y_i \qquad [39.]$$

$$M_x = 2 \cdot c \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum {y_i}^2 \qquad [40.]$$

$$M_y = 2 \cdot c \cdot \sum(x_i \cdot y_i) \qquad [41.]$$

$$I_x = 2 \cdot c \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum {y_i}^3 \qquad [42.]$$

$I_y = 2 \cdot c \cdot \sum(x_i{}^2 \cdot y_i)$ [43.]

En este caso el coeficiente es $c = \frac{2l}{n}$, siendo l el intervalo total y n el número de ordenadas considerado.

Planos de Agua

Metodológicamente, los cálculos de áreas y momentos se limitan a la aplicación de los procedimientos desarrollados previamente, para las ordenadas incluidas en la tabla de puntos que define la superficie del casco, numeradas a partir de la estación *# 0* hasta la estación *# 10*.

Sin embargo, es necesario entender que las estaciones no definen generalmente los extremos de la carena, por lo cual existirán porciones que resulten exteriores al conjunto de estaciones predefinidas, como es el caso normalmente para flotaciones de los calados superiores, o que ocupen un espacio intermedio entre estaciones interiores como en el caso de las flotaciones para calados inferiores.

Es necesario entonces calcular individualmente esas fracciones de áreas y sus momentos de primer y segundo orden respecto a los ejes escogidos y sumarlos a los valores previamente determinados. De esta manera se obtienen las propiedades del plano completo.

Planos transversales

Análogamente que lo aplicado para los planos de agua, se puede utilizar las herramientas de la integración numérica para la determinación de áreas y momentos de las secciones transversales. Particularmente útil es la determinación del área seccional y momento respecto al plano de base en función del calado. Esto permitirá posteriormente calcular el volumen y la posición vertical del centro de carena.

Las curvas de áreas en función del calado, denominadas curvas de Bonjean, son utilizadas asimismo en forma independiente para la determinación de volúmenes de carena cuando existe un asiento positivo.

El procedimiento de integración debe ser cuidadosamente estudiado, dado que el número de intervalos a integrar variará de acuerdo a la línea de agua considerada, por consiguiente los factores de integración e incluso los métodos de integración no serán los mismos en todos los casos, salvo que se integre mediante la regla de trapecios donde el número de intervalos no precisa tener una forma determinada; en este último caso es necesario tener una división suficientemente buena dado que la aproximación lineal es menos exacta.

Cálculo de volúmenes y sus respectivos momentos y centros de gravedad

Metodología de cálculo

El volumen y los momentos de primer orden respecto a los planos de referencia pueden ser calculados a partir de la integración de las áreas y momentos de primer orden correspondientes.

Si se consideran los planos horizontales o flotaciones, un volumen diferencial estará definido por $\delta V = A_{FL} \,.\, \delta z$, siendo además $\delta M_{yz} = M_x.\delta z = A_{FL} \,.\, LCF \,.\, \delta z$ la expresión del momento longitudinal de dicho elemento. Sus integraciones en el sentido vertical permitirán determinar el volumen y el momento de primer orden respecto al plano transversal de referencia.

$$V = \int_0^Z dV = \int_0^Z A_{FL}.dz \qquad [44.]$$

$$M_{yz} = \int_0^Z M_x \cdot dz = \int_0^Z A_{FL} \cdot LCF.dz \qquad [45.]$$

Asimismo, si fueran consideradas los planos transversales o estaciones, el volumen diferencial estará definido por $\delta V = A_{ST} \,.\, \delta x$ y $\delta M_{xy} = M_z \,.\, \delta x = A_{ST} \,.\, z_{ST} \,.\, \delta x$ representa la expresión del momento longitudinal de dicho elemento, donde A_{ST} es el área de la sección transversal hasta la flotación indicada y z_{ST} su centroide respecto al plano horizontal de referencia o Plano Base. Sus integraciones en el sentido longitudinal permitirán determinar el volumen y su momento de primer orden respecto al Plano Base.

$$V = \int_0^L dV = \int_0^L A_{ST}.dx \qquad [46.]$$

$$M_{xy} = \int_0^L M_Z \cdot dx = \int_0^L A_{ST} \cdot z_{ST} \cdot dx \qquad [47.]$$

Numéricamente, estas ecuaciones son de la misma naturaleza que las que representaban áreas y momentos planos, por lo cual se deberá seguir el mismo procedimiento que el desarrollado anteriormente.

Regla de trapecios

$$V = 2 \cdot \frac{h}{2} \cdot \sum (f_j \,.\, A_{FL\,j}) \qquad [48.]$$

$$V = 2 \cdot \frac{s}{2} \cdot \sum (f_i \,.\, A_{ST\,i}) \qquad [49.]$$

ya sea que el volumen fuera calculado en base a las áreas de flotación, siendo *h* la separación entre éstas, o áreas transversales, donde *s* es la separación entre estaciones.

$$M_{yz} = 2 \cdot \frac{h}{2} \cdot \sum (f_j \cdot A_{FL_j} \cdot LCF_j) \qquad [50.]$$

$$M_{xy} = 2 \cdot \frac{s}{2} \cdot \sum (f_i . A_{ST_i} \, z_{ST_i}) \qquad [51.]$$

siendo A_{FLj} es el área de flotación, LCF_j la posición longitudinal de su centroide, A_{STi} el área de estación y z_{STi} la posición vertical de su centroide.

Primera regla de Simpson

$$V = 2 \cdot \frac{2.h}{3} \cdot \sum (f_j \, . \, A_{FLj}) \quad [52.]$$

$$V = 2 \cdot \frac{2.s}{3} \cdot \sum (f_i \, . \, A_{STi}) \quad [53.]$$

$$M_{yz} = 2 \cdot \frac{2.h}{3} \cdot \sum (f_j \cdot A_{FLj} \cdot LCF_j) \quad [54.]$$

$$M_{xy} = 2 \cdot \frac{2.s}{3} \cdot \sum (f_i \, . \, A_{STi} \, z_{STi}) \quad [55.]$$

Sistematización del cálculo numérico

Las formulaciones planteadas anteriormente pueden ser fácilmente incorporadas a planillas o programas más complejos de computación, que utilizan estos algoritmos para el cálculo automático.

Tecnologías para el cálculo numérico

La introducción de herramientas informáticas ha desplazado el centro de atención puesto en el cálculo de áreas y volúmenes para enfocarse en el diseño, utilizando para ello programas informáticos diseñados para la generación de formas tridimensionales (*CAD 3D*) que incluyen en su formulación, mediante procedimientos con elementos y volúmenes finitos, el cálculo de las propiedades de cuerpos sólidos.

De esta manera, los extensos procedimientos utilizados para determinar las curvas hidrostáticas y las curvas cruzadas se han facilitado enormemente, disminuyendo los errores de cálculo y liberando al ingeniero naval para otras tareas relacionadas con el propio diseño.