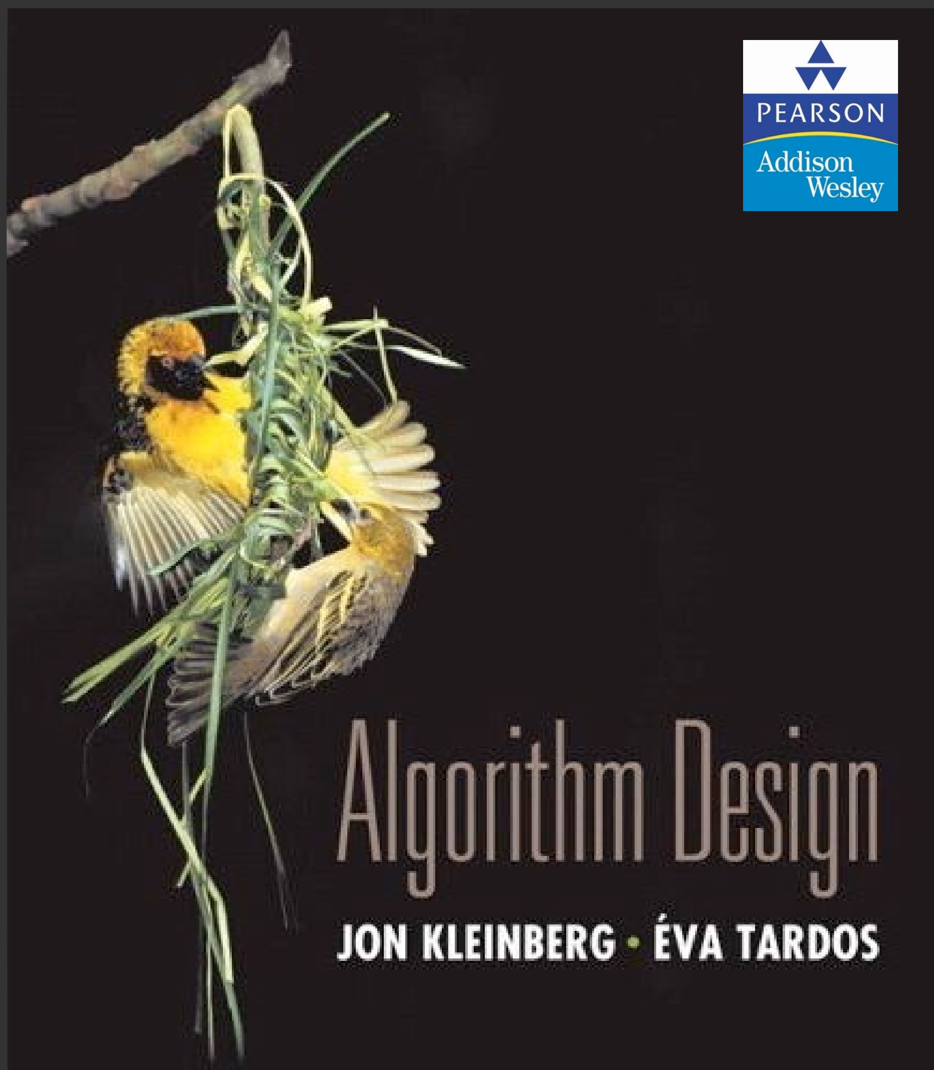


Diapositivas de Kevin Wayne
Lecture slides by Kevin Wayne

http://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos

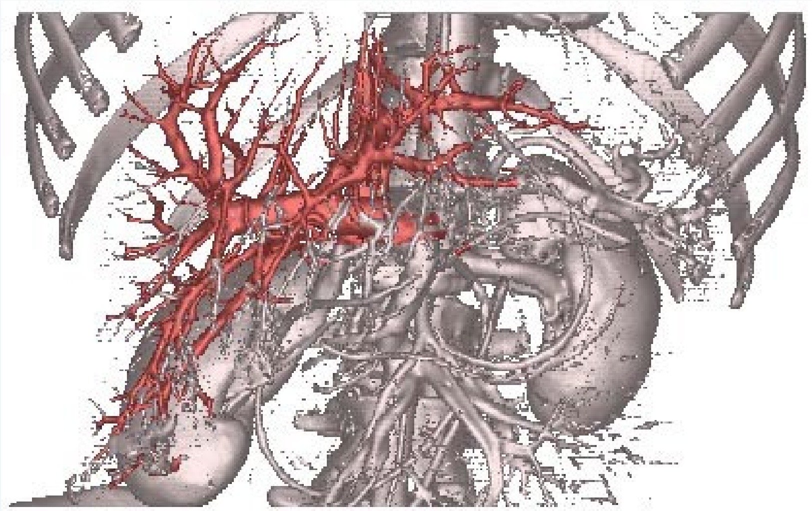
7. Flujo de red II

- *emparejamiento bipartito*
- *caminos disjuntos*
- *extensiones a caudal máximo*
- *diseño de encuestas*
- *programación de vuelos*
- *segmentación de imágenes*
- *selección de proyectos*
- *eliminación del béisbol*

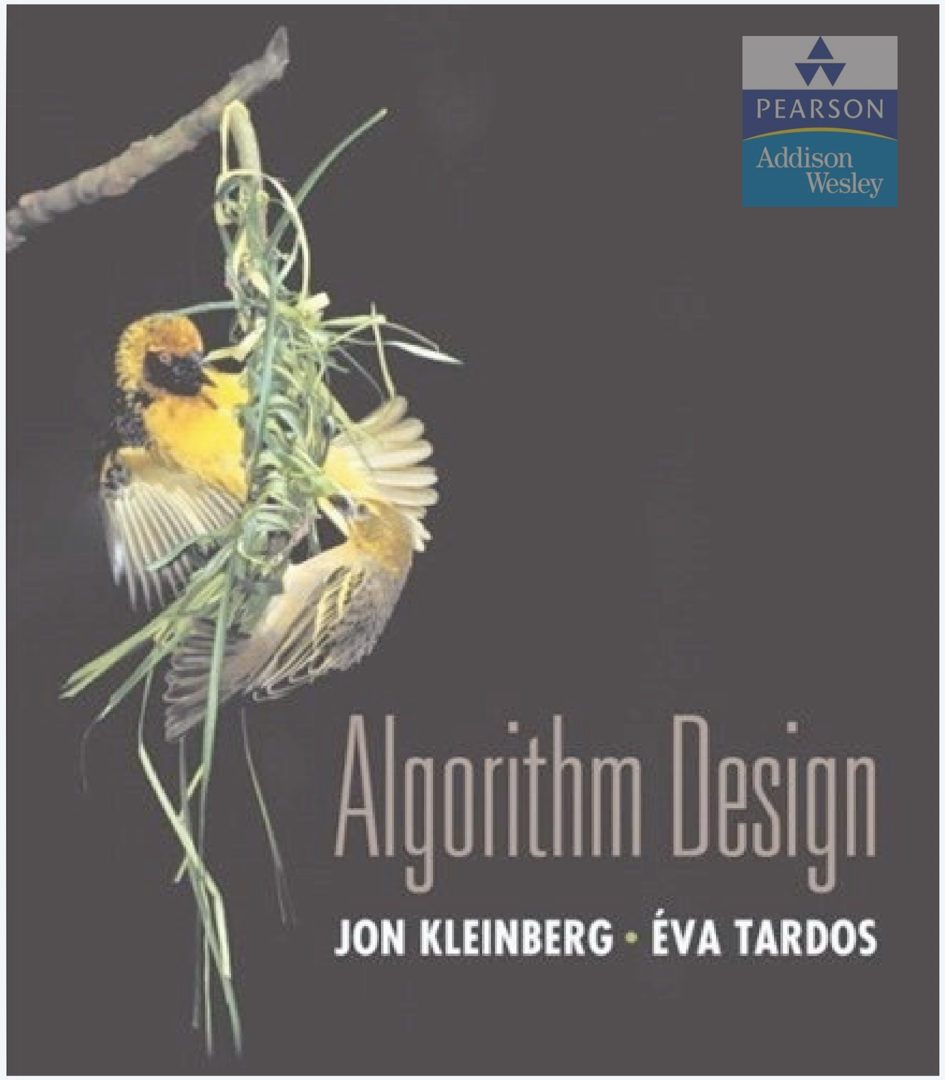
Aplicaciones Max-flow y Min-cut

Los problemas max-flow y min-cut son modelos ampliamente aplicables.

- Minería de datos.
- Minería a cielo abierto.
- Emparejamiento bipartito.
- Fiabilidad de la red.
- Eliminación del béisbol.
- Segmentación de imágenes.
- Conectividad de red.
- Informática distribuida.
- Seguridad de los datos estadísticos.
- Emparejamiento igualitario estable.
- Detección de intrusiones en la red.
- Reconstrucción de escenas multicámara.
- Colocación de sensores para la seguridad nacional.
- Muchos, muchos, más.



segmentación del hígado y de la vascularización hepática



APARTADO 7.5

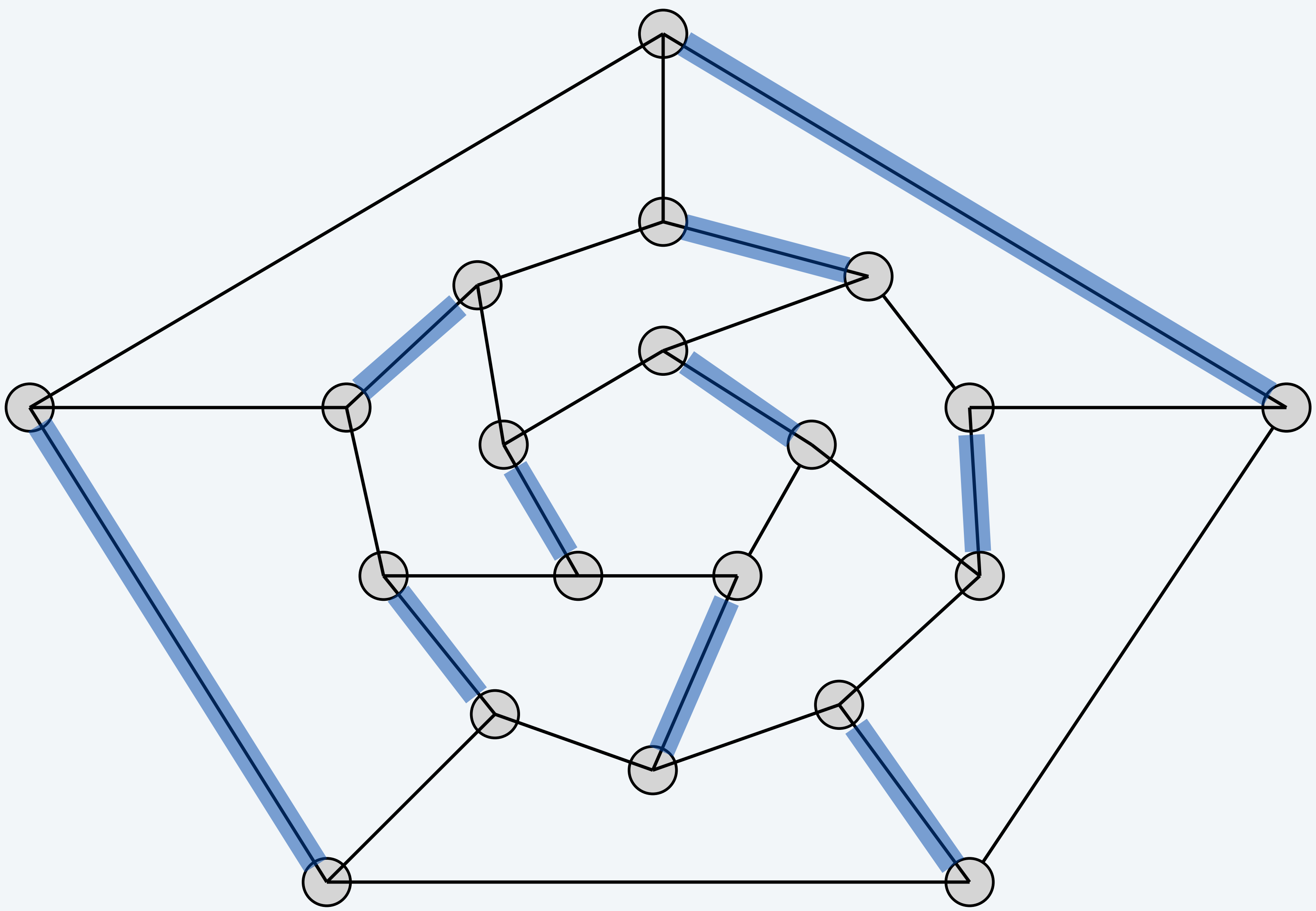
7. FLUJO DE RED II

- *emparejamiento bipartito*
- *caminos disjuntos*
- *extensiones a caudal máximo*
- *diseño de encuestas*
- *programación de vuelos*
- *segmentación de imágenes*
- *selección de proyectos*
- *eliminación del béisbol*

A juego

Def. Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$ un subconjunto de aristas $M \subseteq E$ es un emparejamiento si cada nodo aparece como máximo en una arista de M.

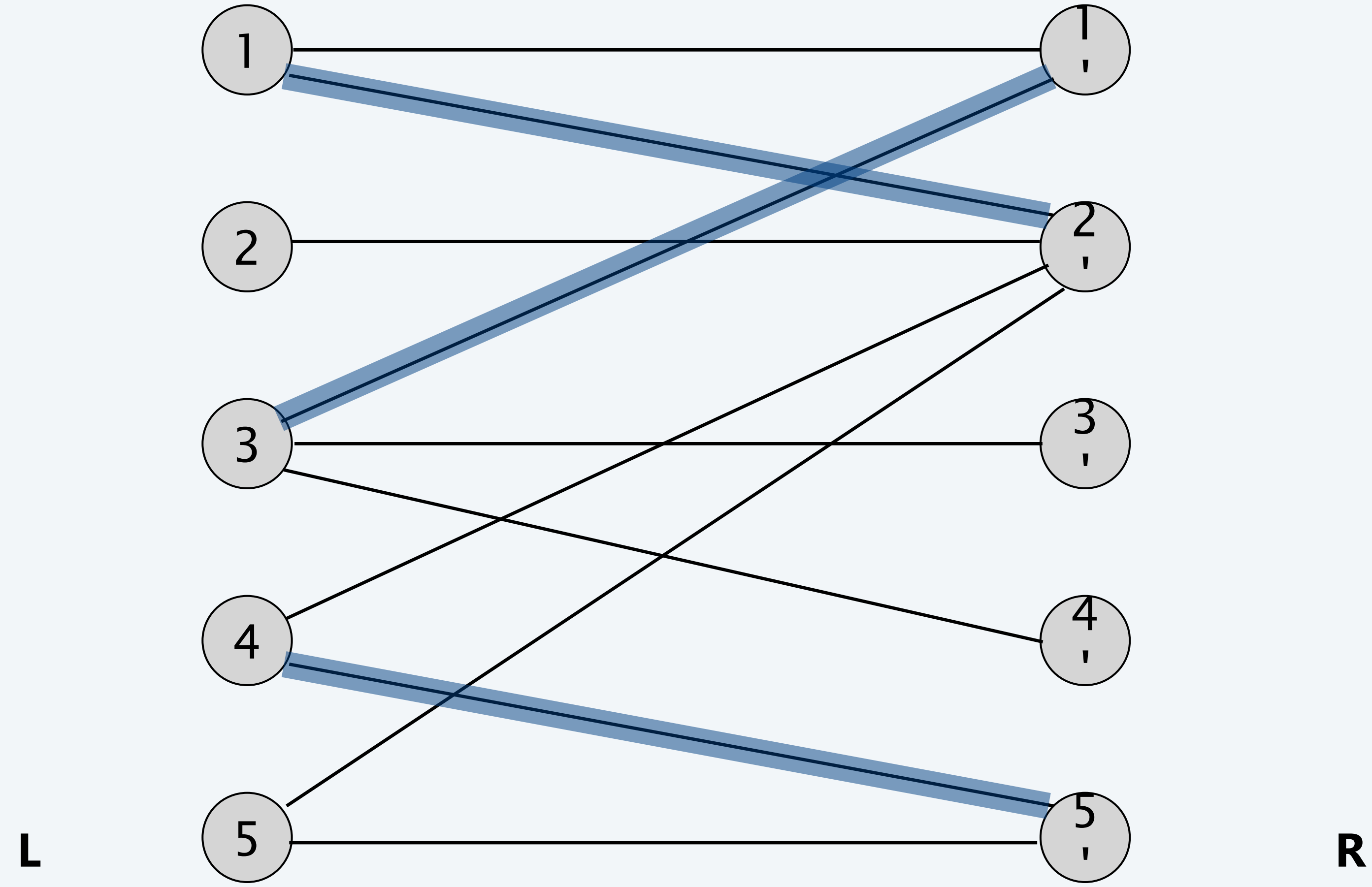
Emparejamiento máximo. Dado un grafo, encontrar un emparejamiento de cardinalidad máxima.



Emparejamiento bipartito

Def. Un grafo G es bipartito si los nodos pueden dividirse en dos subconjuntos L y R de forma que cada arista conecta un nodo de L con uno de R.

Emparejamiento bipartito. Dado un grafo bipartito $G = (L \cup R, E)$, encontrar un emparejamiento de cardinalidad máxima.

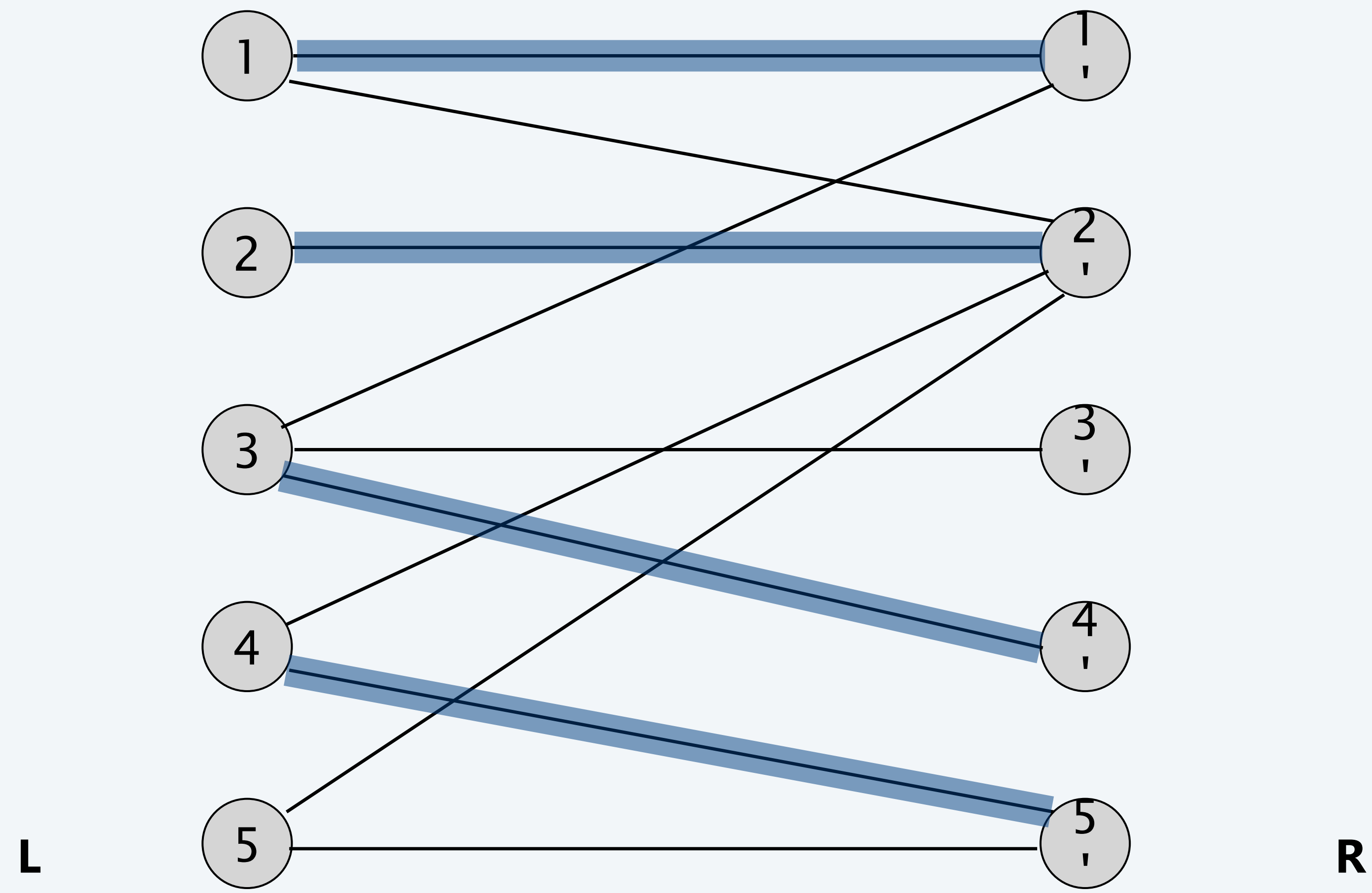


emparejamiento: 1-2', 3-1', 4-5'

Emparejamiento bipartito

Def. Un grafo G es bipartito si los nodos se pueden dividir en dos subconjuntos L y R de forma que cada arista conecta un nodo de L con uno de R.

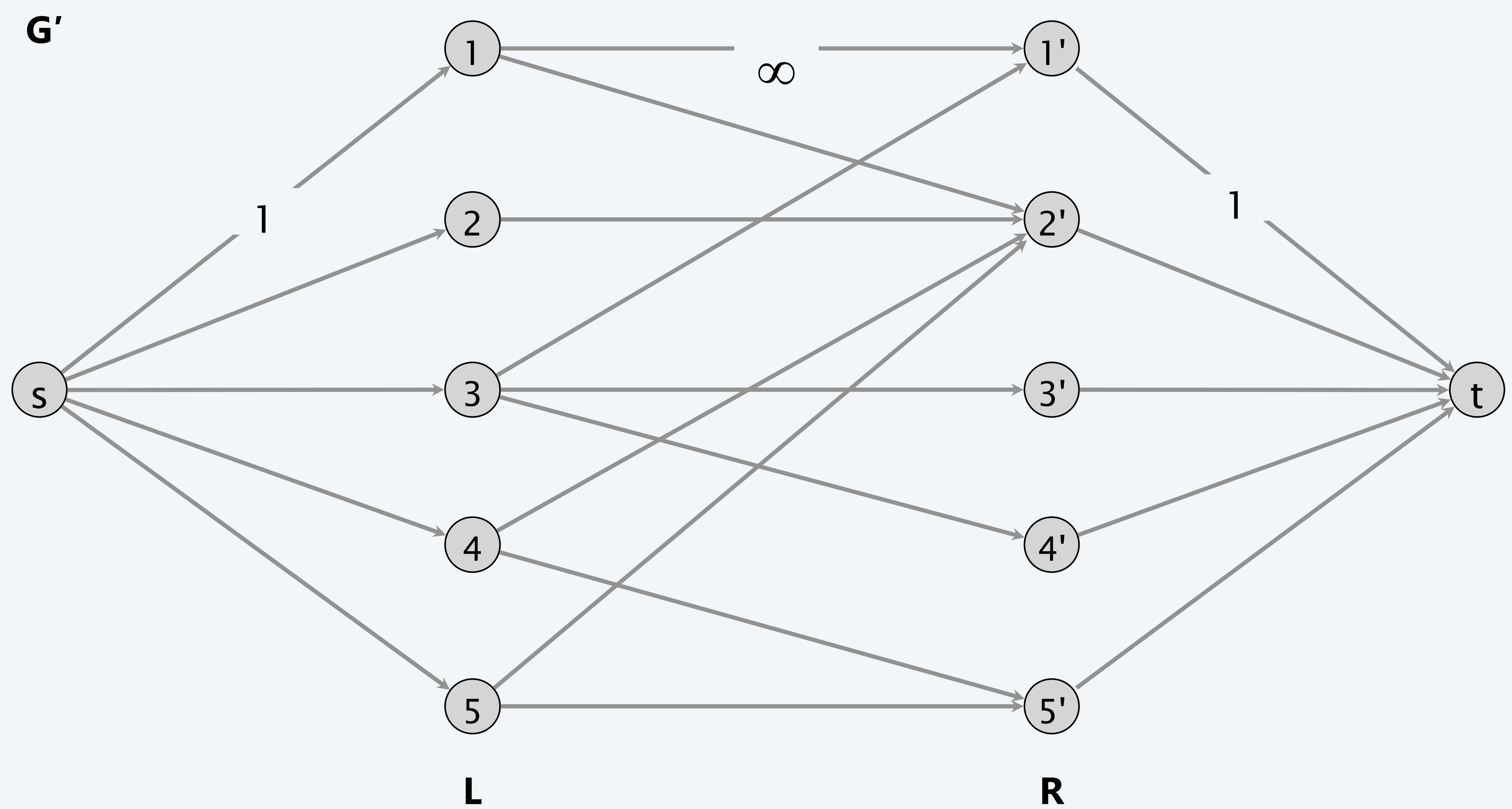
Emparejamiento bipartito. Dado un grafo bipartito $G = (L \cup R, E)$, encontrar un emparejamiento de cardinalidad máxima.



emparejamiento: 1-1', 2-2', 3-4', 4-5'

Emparejamiento bipartito: formulación de flujo máximo

- Crea el dígrafo $\mathbf{G'} = (L \cup R \cup \{s, t\}, \mathbf{E'})$.
- Dirija todas las aristas de L a R, y asigne capacidad infinita (o unitaria).
- Añadir fuente s, y aristas de capacidad unitaria desde s a cada nodo en L.
- Añade el sumidero t, y aristas de capacidad unitaria desde cada nodo de R hasta t.

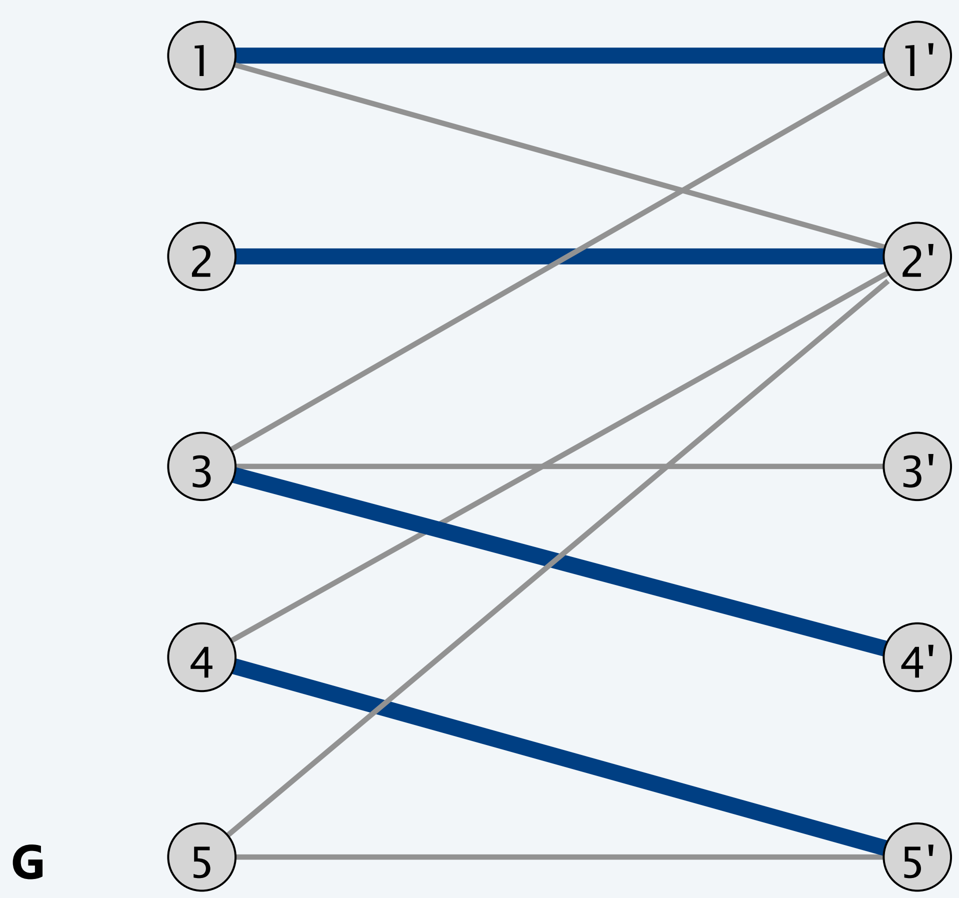


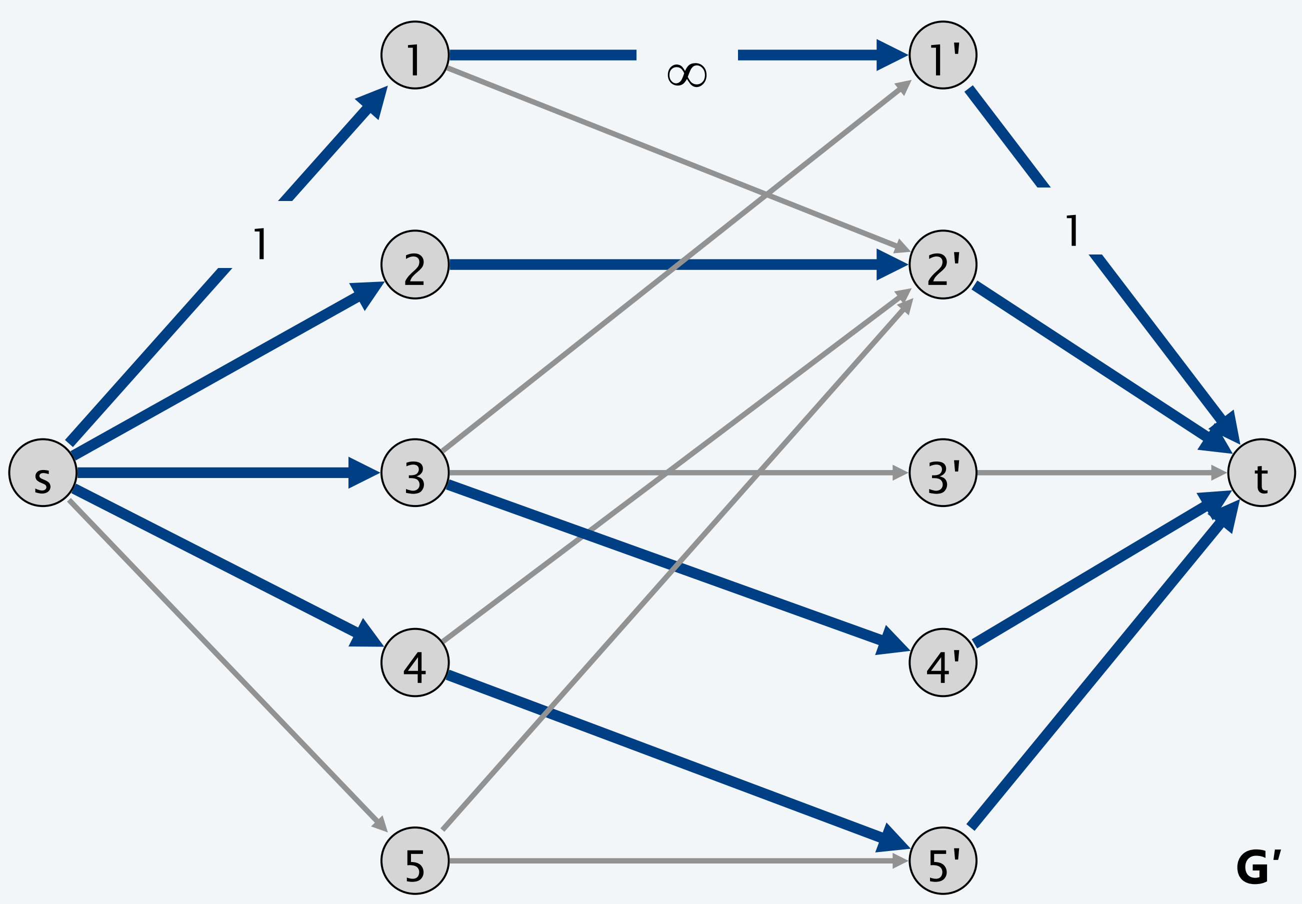
Formulación de flujo máximo: prueba de corrección

Teorema. Cardinalidad máxima de un emparejamiento en G = valor del flujo máximo en G'.

Pf. $\leq$

- Dada una coincidencia máxima M de cardinalidad k.
- Consideremos el flujo f que envía 1 unidad por cada uno de los k caminos.
- f es un flujo, y tiene valor k. ▪



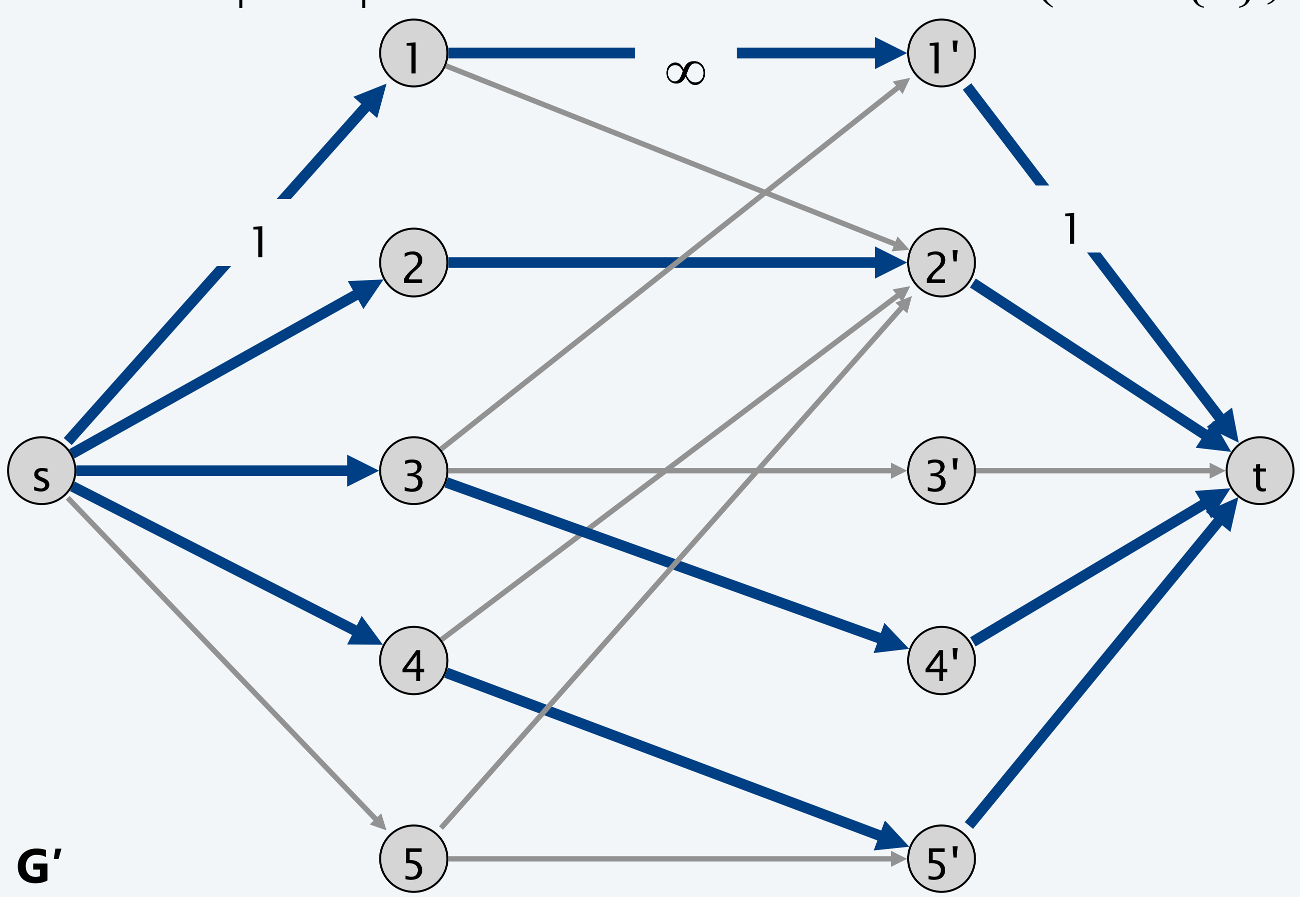


Formulación de flujo máximo: prueba de corrección

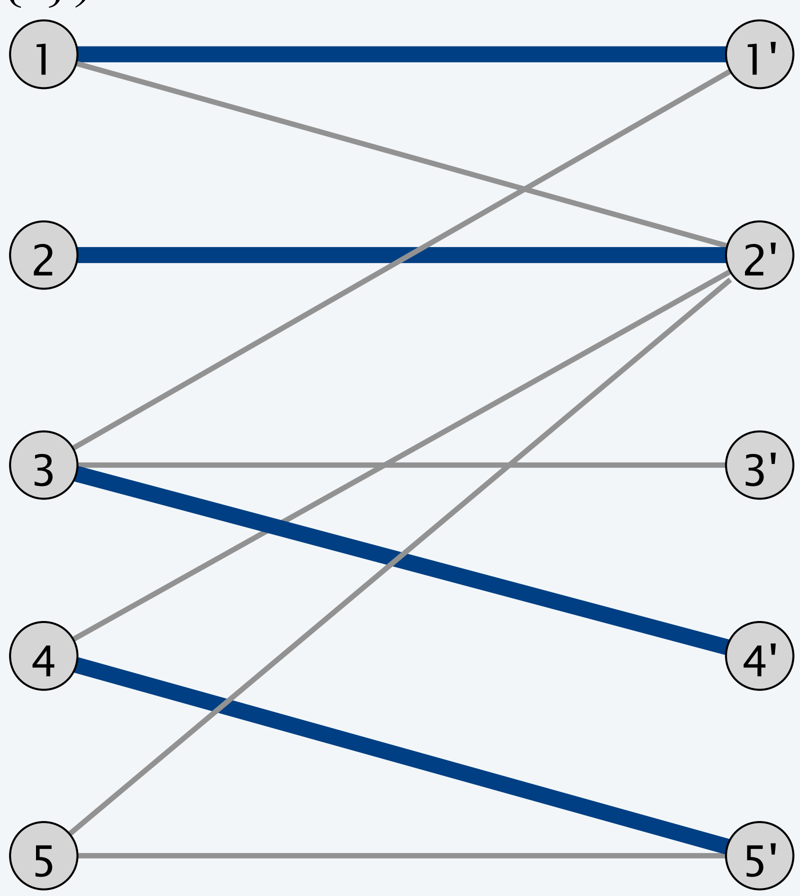
Teorema. Cardinalidad máxima de un emparejamiento en G = valor del flujo máximo en G'.

Pf. $\geq$

- Sea f un flujo máximo en $\mathbf{G'}$ de valor k.
- Teorema de integralidad $\Rightarrow$ k es integral y puede suponer $que\, f$ es 0-1.
- Consideremos M = conjunto de aristas de L a R con $f\,(e) = 1$.
  - cada nodo de L y R participa como máximo en una arista de M
  - $|\mathrm{M}| = k$: considerar corte $(L \cup \{\mathrm{s}\}, R \cup \{\mathrm{t}\})$ ▪



G′



G

Emparejamiento perfecto en un grafo bipartito

Def. Dado un grafo $G = (V, E)$ un subconjunto de aristas $M \subseteq E$ es un emparejamiento perfecto
si cada nodo aparece exactamente en una arista de M.

Q. ¿Cuándo un grafo bipartito tiene una correspondencia perfecta?

Estructura de grafos bipartitos con emparejamientos perfectos.

- Claramente debemos tener $|L| = |R|$.
- ¿Qué otras condiciones son necesarias?
- ¿Qué condiciones son suficientes?

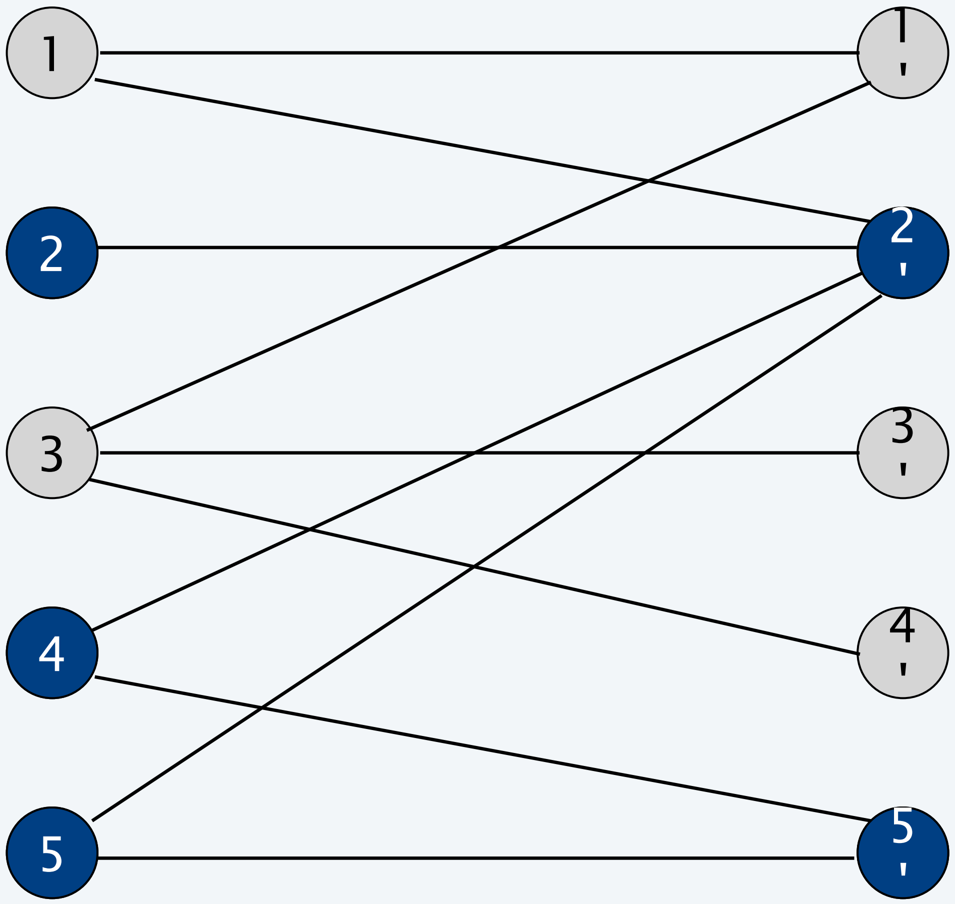
Emparejamiento perfecto en un grafo bipartito

Notación. Sea S un subconjunto de nodos, y sea $N(S)$ el conjunto de nodos adyacentes a nodos en S.

Observación. Si un grafo bipartito $G = (L \cup R, E)$ tiene un emparejamiento perfecto,
entonces $|\ N(S)\ | \geq |\ S\ |$ para todos los subconjuntos $S \subseteq L$.
Pf. Cada nodo de S debe corresponderse con un nodo diferente de $N(S)$. ▪

S = { 2, 4, 5 }

N(S) = { 2', 5' }



no hay coincidencia perfecta

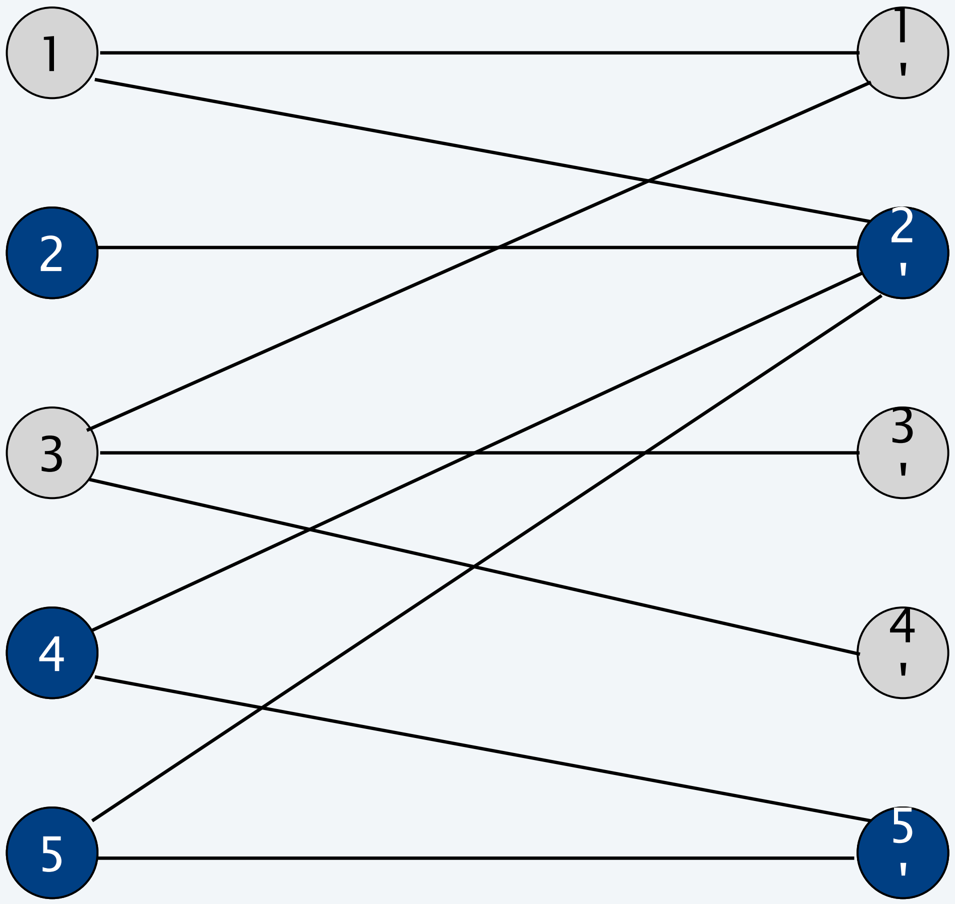
Teorema de Hall

Teorema. Sea $G = (L \cup R, E)$ un grafo bipartito con $| L | = | R |$.
G tiene un emparejamiento perfecto si $| N(S) | \geq | S |$ para todos los subconjuntos $S \subseteq L$.

Pf. ⇒ Esta fue la observación anterior.

S = { 2, 4, 5 }

N(S) = { 2', 5' }

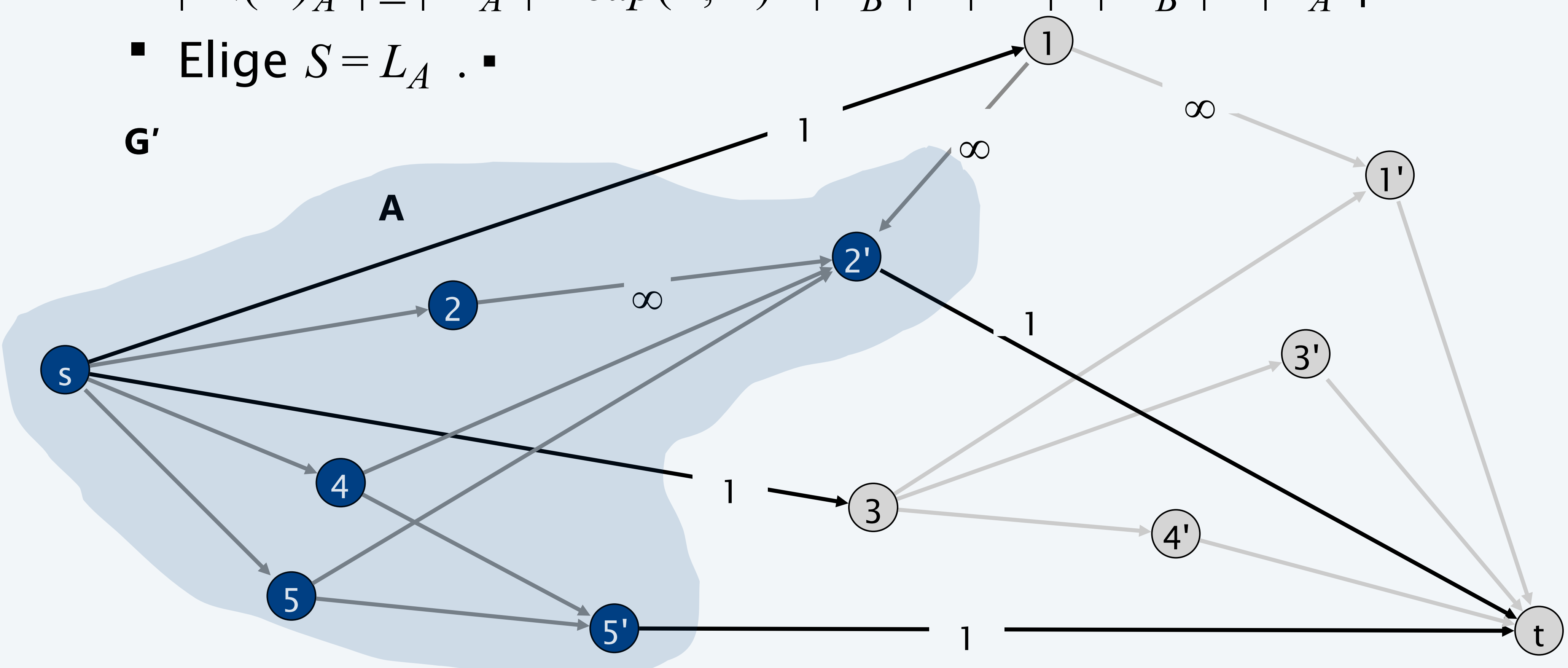


no hay coincidencia perfecta

Demostración del teorema de Hall

Pf. Supongamos *que* G no tiene una correspondencia perfecta.

- Formúlalo como un problema de flujo máximo y deja que (A, B) sea un corte mínimo en **G′**.
- Por el teorema max-flow min-cut, $cap(A, B) < | \mathrm{L} \quad |$.
- Definir $L_A = L \cap A$, $L_B = L \cap B$, $R_A = R \cap A$.
- $cap(A, B) = | \mathrm{L}_B | + | \mathrm{R}_A \quad |$.
- Dado que min cut no puede usar ∞ aristas: $N(L_A) \subseteq R_{\cdot A}$
- $| \mathrm{N}(L\ )_A \ | \leq | \mathrm{R}_A \ | = cap(A, B) - | L_B | < | \mathrm{L} \quad | - | \mathrm{L}_B | = | L_A \ |$.
- Elige $S = L_A$. ▪



Tiempo de ejecución del emparejamiento bipartito

Teorema. El algoritmo de Ford-Fulkerson puede implementarse para resolver el problema de emparejamiento bipartito en tiempo $O(m\, n)$.

Teorema. [Hopcroft-Karp 1973] El problema de emparejamiento bipartito puede resolverse en tiempo $O(m\, n^{1/2})$.

Teorema. [Even-Tarjan 1975] El algoritmo del camino más corto puede implementarse para resolver el problema de emparejamiento bipartito en tiempo $O(m\, n^{1/2})$.

Teorema. [Mądry 2013] El problema de emparejamiento bipartito puede resolverse en $\tilde{O}(n^{10/7})$ ...

SIAM J. Comput.
Vol. 2, No. 4, December 1973

AN $n^{5/2}$ ALGORITHM FOR MAXIMUM MATCHINGS IN BIPARTITE GRAPHS*

JOHN E. HOPCROFT† AND RICHARD M. KARP‡

Abstract. The present paper shows how to construct a maximum matching in a bipartite graph with n vertices and m edges in a number of computation steps proportional to $(m + n)\sqrt{n}$.

Key words. algorithm, algorithmic analysis, bipartite graphs, computational complexity, graphs, matching

Emparejamiento no bipartito

Emparejamiento no bipartito. Dado un grafo no dirigido (no necesariamente bipartito), encontrar un emparejamiento de cardinalidad máxima.

- La estructura de los grafos no bipartitos es más complicada.
- Pero bien entendido. [Tutte-Berge, Edmonds-Galai]
- Algoritmo Blossom: $O(n^4)$. [Edmonds 1965].
- El más conocido: $O(m\, n^{1/2})$. [Micali-Vazirani 1980, Vazirani 1994].

PATHS, TREES, AND FLOWERS

JACK EDMONDS

1. Introduction. A *graph* G for purposes here is a finite set of elements called *vertices* and a finite set of elements called *edges* such that each edge *meets* exactly two vertices, called the *end-points* of the edge. An edge is said to *join* its end-points.

A *matching* in G is a subset of its edges such that no two meet the same vertex. We describe an efficient algorithm for finding in a given graph a matching of maximum cardinality. This problem was posed and partly solved by C. Berge; see Sections 3.7 and 3.8.

COMBINATORICA
Akadémiai Kiadó – Springer-Verlag

COMBINATORICA **14** (1) (1994) 71–109

A THEORY OF ALTERNATING PATHS AND BLOSSOMS FOR PROVING CORRECTNESS OF THE $O(\sqrt{V}E)$ GENERAL GRAPH MAXIMUM MATCHING ALGORITHM

VIJAY V. VAZIRANI[1]

Received December 30, 1989
Revised June 15, 1993

Importancia histórica (Jack Edmonds 1965)

2. Digression. An explanation is due on the use of the words "efficient algorithm." First, what I present is a conceptual description of an algorithm and not a particular formalized algorithm or "code."

For practical purposes computational details are vital. However, my purpose is only to show as attractively as I can that there is an efficient algorithm. According to the dictionary, "efficient" means "adequate in operation or performance." This is roughly the meaning I want—in the sense that it is conceivable for maximum matching to have no efficient algorithm. Perhaps a better word is "good."

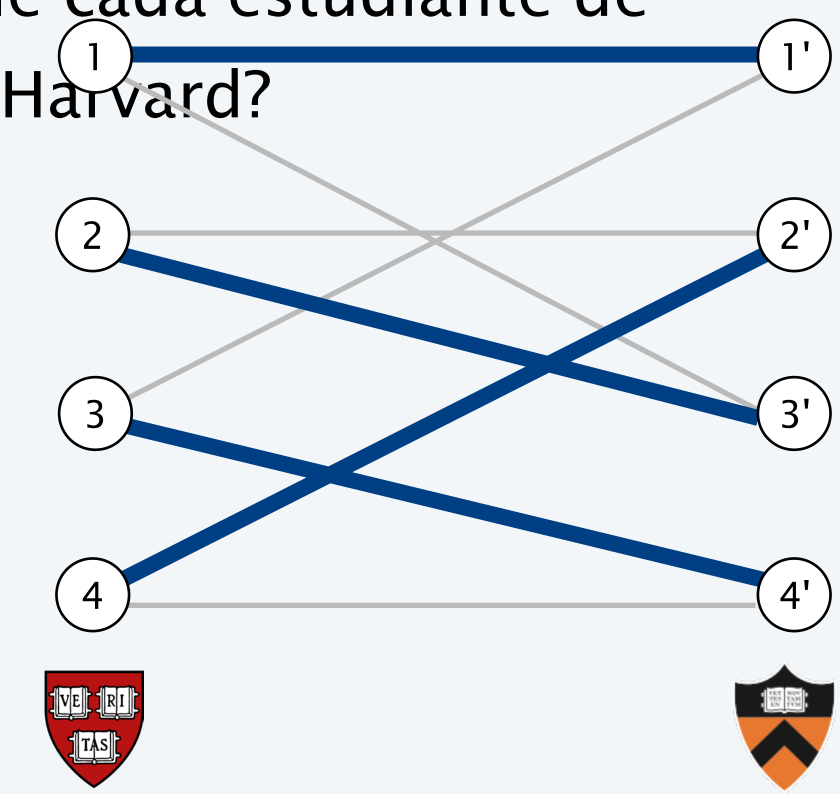
I am claiming, as a mathematical result, the existence of a *good* algorithm for finding a maximum cardinality matching in a graph.

There is an obvious finite algorithm, but that algorithm increases in difficulty exponentially with the size of the graph. It is by no means obvious whether *or not* there exists an algorithm whose difficulty increases only algebraically with the size of the graph.

Problema del hackathon.

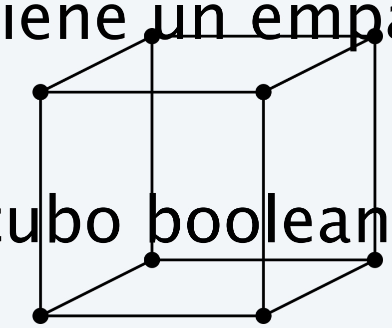
- Hackathon al que asistieron n estudiantes de Harvard y n estudiantes de Princeton.
- Cada estudiante de Harvard es amigo de exactamente $k > 0$ estudiantes de Princeton;
  cada estudiante de Princeton es amigo de exactamente k estudiantes de Harvard.
- La amistad es mutua.
- ¿Es posible organizar el hackathon de forma que cada estudiante de Princeton programe con un amigo diferente de Harvard?

grafo bipartito 2-regular



Reformulación matemática. ¿Tiene todo grafo bipartito tiene un emparejamiento perfecto?

Ej. Hipercubo booleano.



los grafos bipartitos k-regulares tienen emparejamientos perfectos

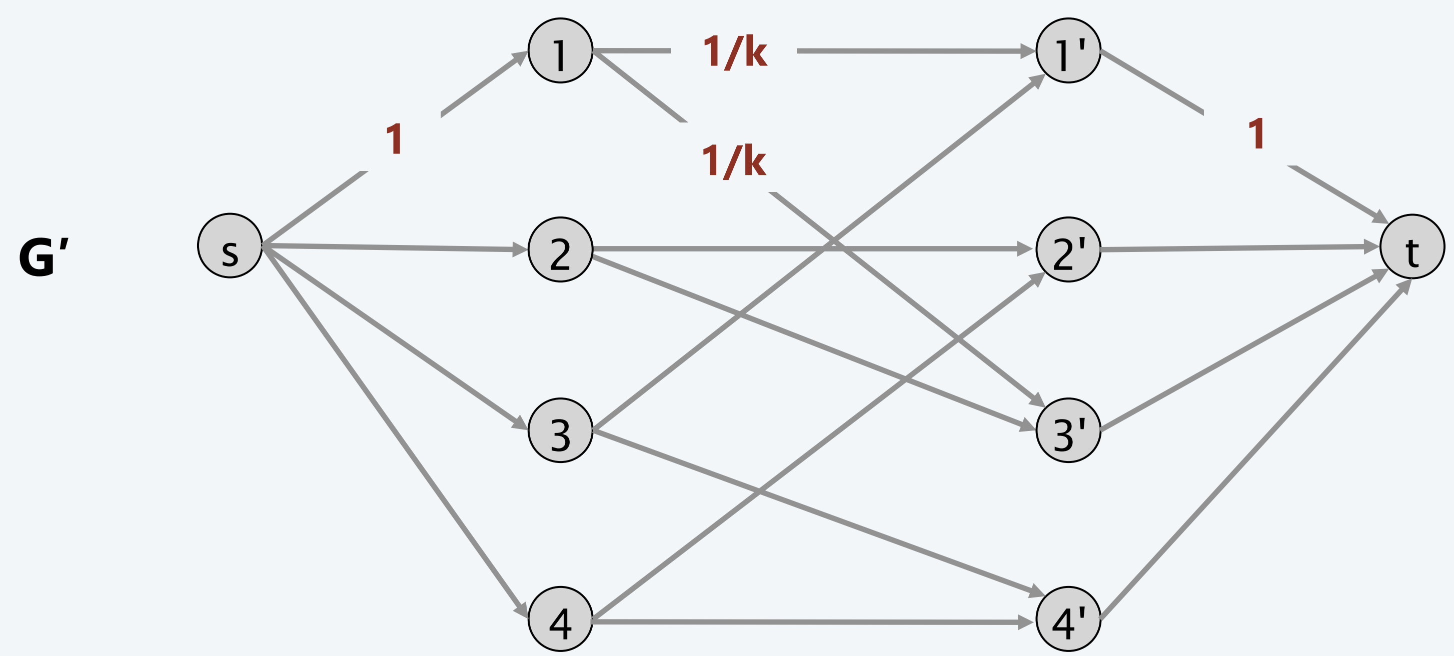
Teorema. Todo grafo bipartito *k-regular* G tiene un emparejamiento perfecto.

Pf.

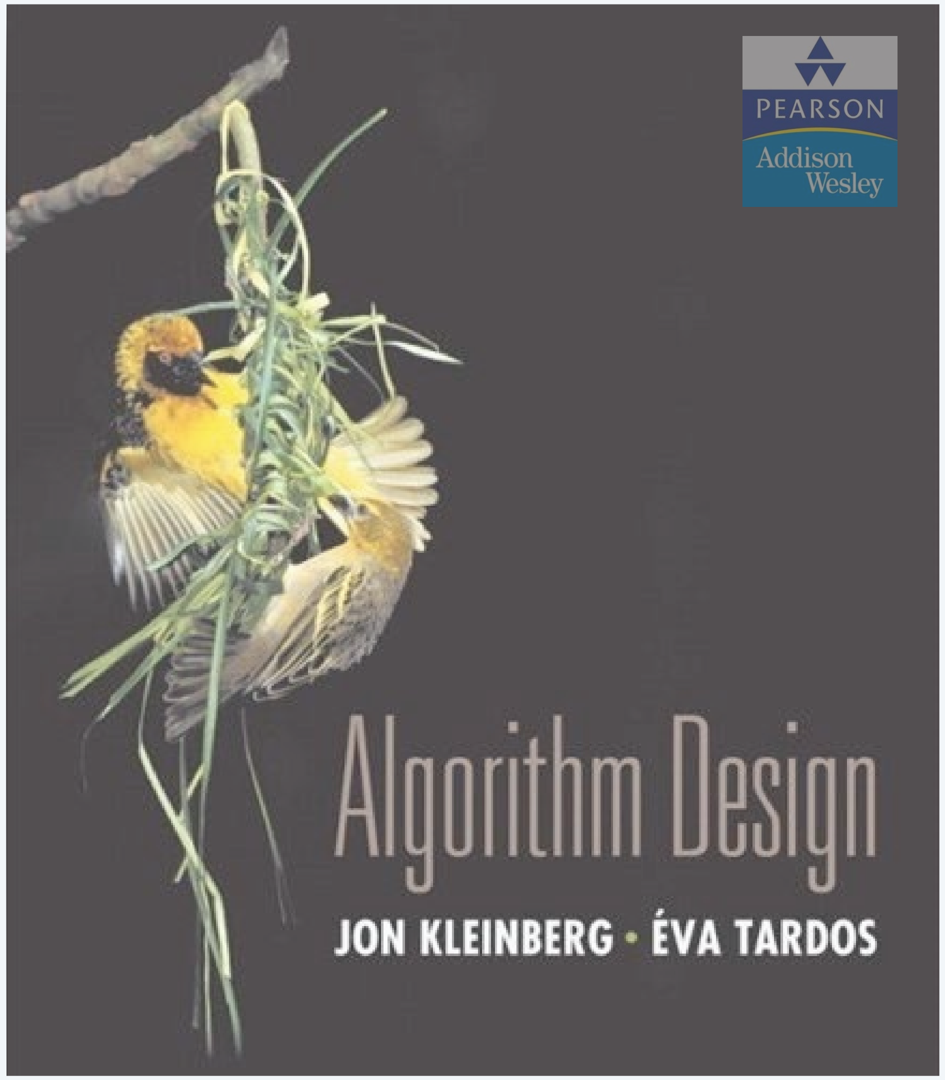
- Tamaño del emparejamiento máximo = valor del flujo máximo en $\mathbf{G'}$.
- Considere el flujo

$$f(u,v) = \begin{cases} 1/k & \text{if } (u,v) \in E \\ 1 & \text{if } u = s \text{ or } v = t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- f es un flujo en $\mathbf{G'}$ y su valor $= n \Rightarrow$ coincidencia perfecta. ▪



un flujo factible f de valor n



APARTADO 7.6

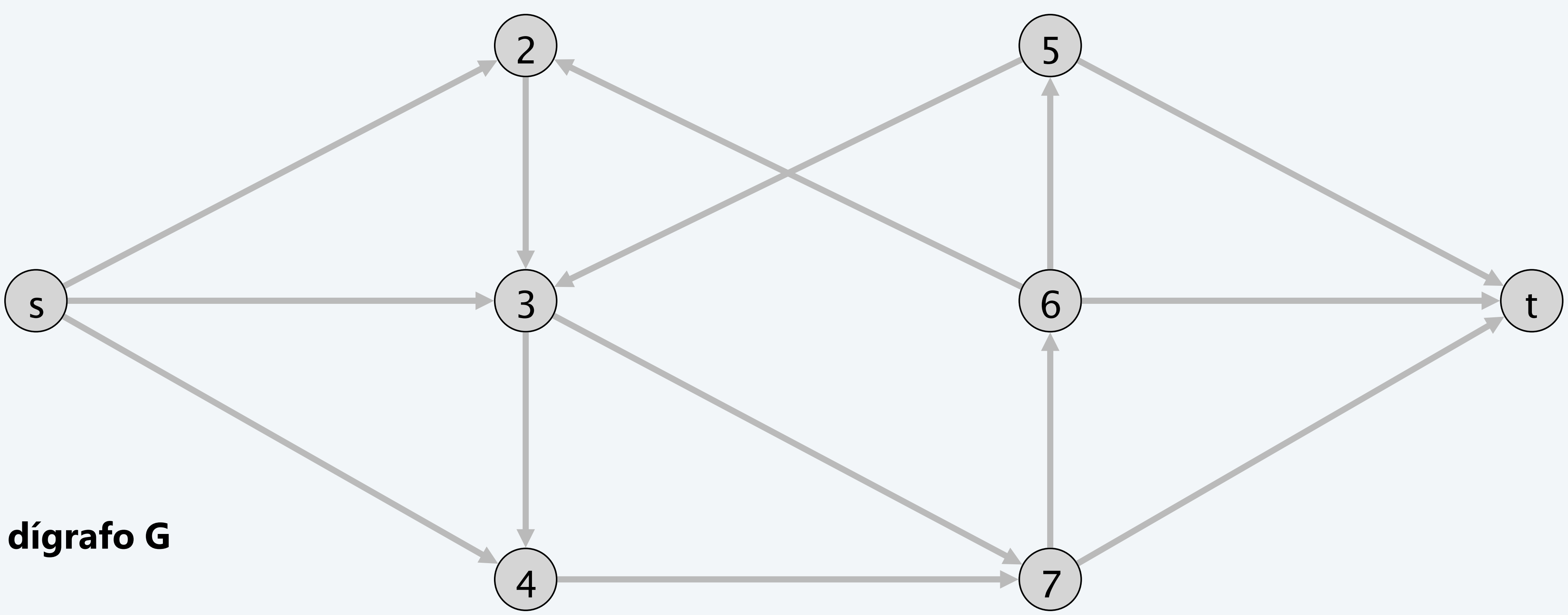
7. FLUJO DE RED II

- emparejamiento bipartito
- caminos disjuntos
- extensiones a caudal máximo
- diseño de encuestas
- programación de vuelos
- segmentación de imágenes
- selección de proyectos
- eliminación del béisbol

Trayectorias con aristas disjuntas

Def. Dos trayectorias son disjuntas si no tienen ninguna arista en común.

Problema de los caminos disjuntos. Dado un dígrafo $G = (V, E)$ y dos nodos s y t,
hallar el número máximo de caminos de aristas disjuntas $s \rightsquigarrow t$.



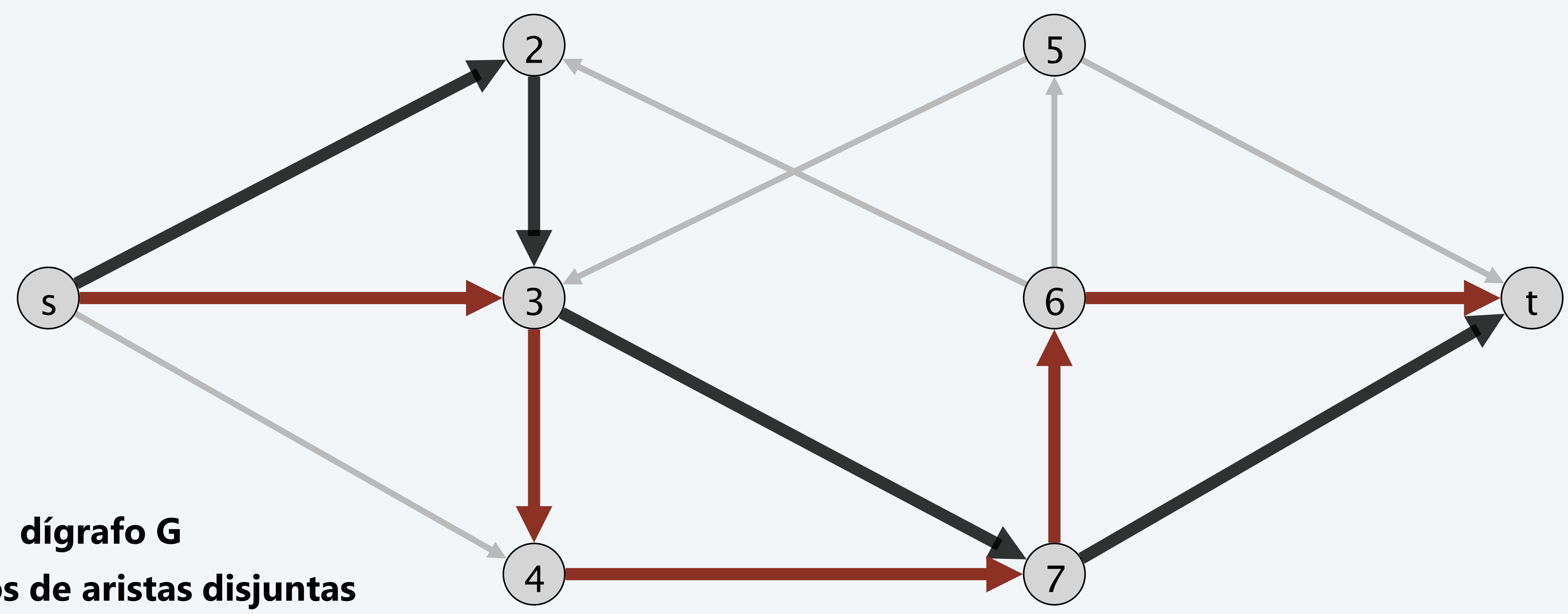
dígrafo G

Trayectorias con aristas disjuntas

Def. Dos trayectorias son disjuntas si no tienen ninguna arista en común.

Problema de los caminos disjuntos. Dado un dígrafo $G = (V, E)$ y dos nodos s y t,
hallar el número máximo de caminos de aristas disjuntas $s \rightsquigarrow t$.

Ej. Redes de comunicación.



dígrafo G
2 caminos de aristas disjuntas

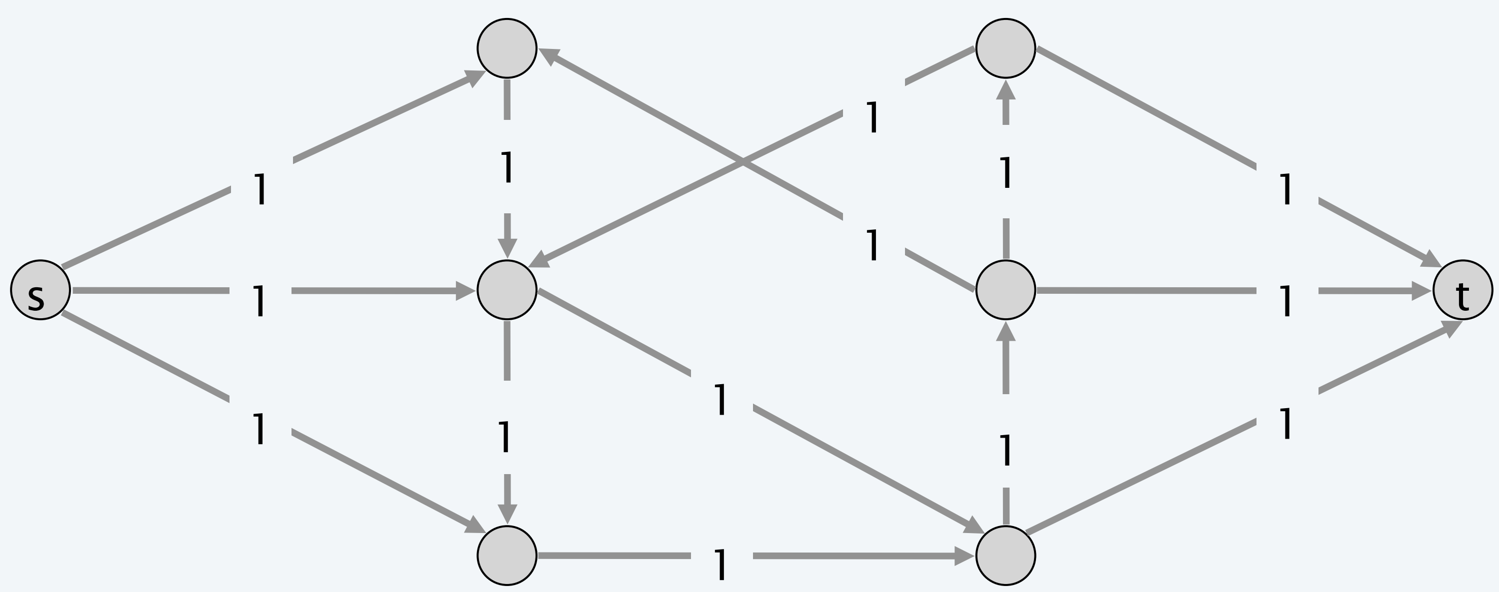
Trayectorias con aristas disjuntas

Formulación de flujo máximo. Asignar capacidad unitaria a cada arista.

Teorema. El número máximo de caminos $s \rightsquigarrow t$ separados por aristas es igual al valor del flujo máximo.

Pf. $\leq$

- Supongamos que hay k trayectorias $s \rightsquigarrow t$ disjuntas P_1 , ..., $P_{\cdot k}$
- Fije $f(e) = 1$ si e participa en algún camino P_j ; de lo contrario *fije* $f(e) = 0$.
- Como los caminos son disjuntos por aristas, f es un flujo de valor k. ▪



Trayectorias separadas por aristas

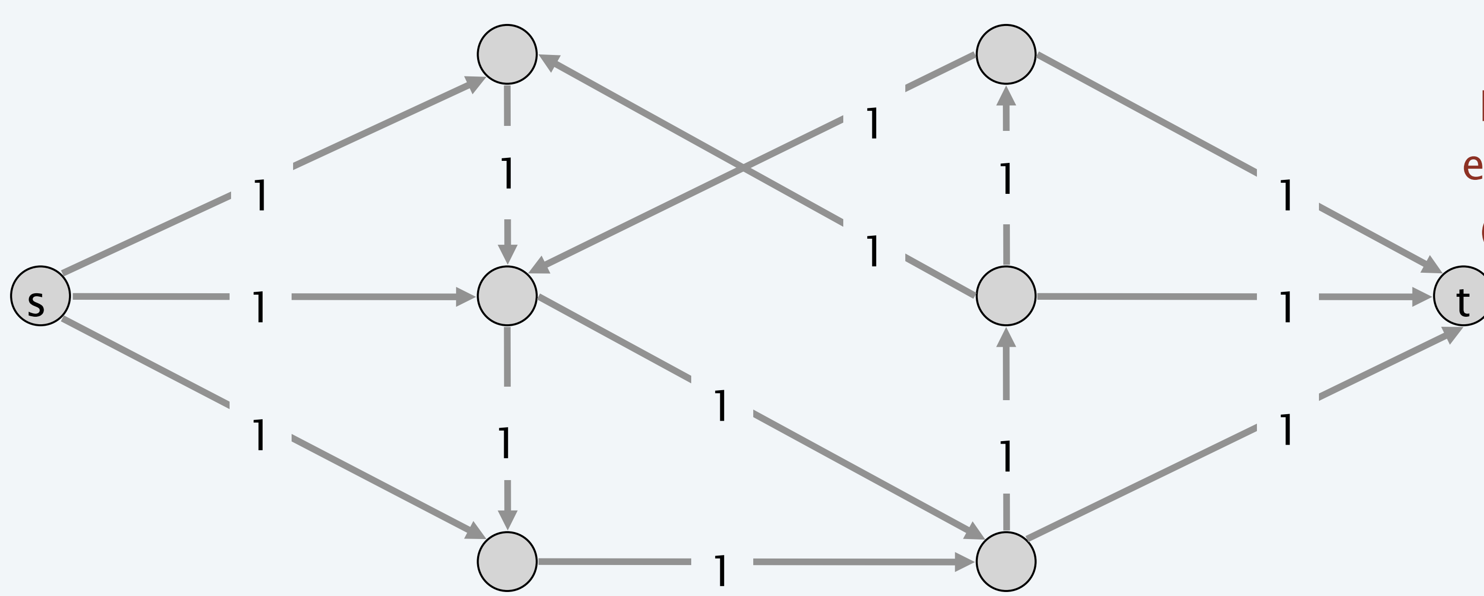
Formulación de flujo máximo. Asignar capacidad unitaria a cada arista.

Teorema. El número máximo de caminos $s \rightsquigarrow t$ separados por aristas es igual al valor del flujo máximo.

Pf. ≥

- Supongamos que el valor máximo de flujo es k.
- Teorema de integralidad $\Rightarrow$ existe 0-1 flujo f de valor k.
- Consideremos la arista (s, u) con $f(s, u) = 1$.
  - por conservación del flujo, existe una arista (u, v) con $f(u, v) = 1$
  - continuar hasta alcanzar t, eligiendo siempre una nueva arista
- Produce k caminos (no necesariamente simples) de aristas disjuntas. ▪

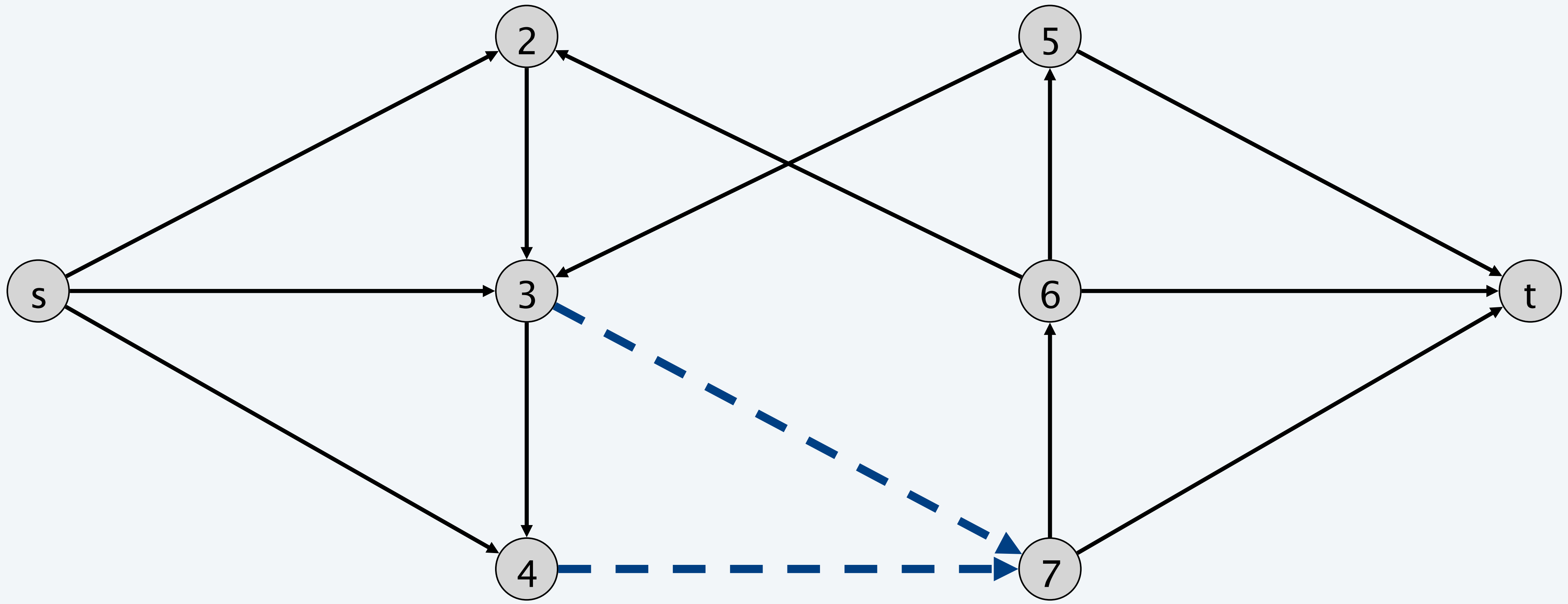
puede eliminar los ciclos para obtener rutas simples en tiempo O(mn) si se desea (descomposición de flujos)



Conectividad de red

Def. Un conjunto de aristas $F \subseteq E$ desconecta t de s si cada camino $s \leadsto t$ utiliza al menos una arista en F.

Conectividad de la red. Dado un dígrafo $G = (V, E)$ y dos nodos s y t, hallar el número mínimo de aristas cuya eliminación desconecta $a\ t$ de s.

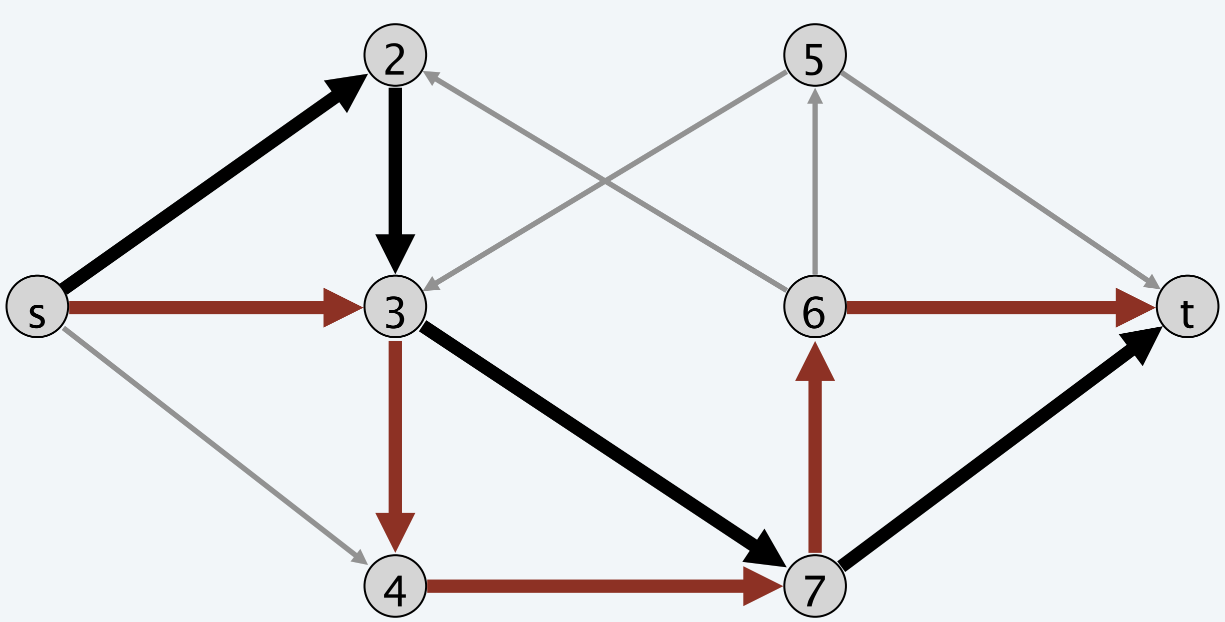


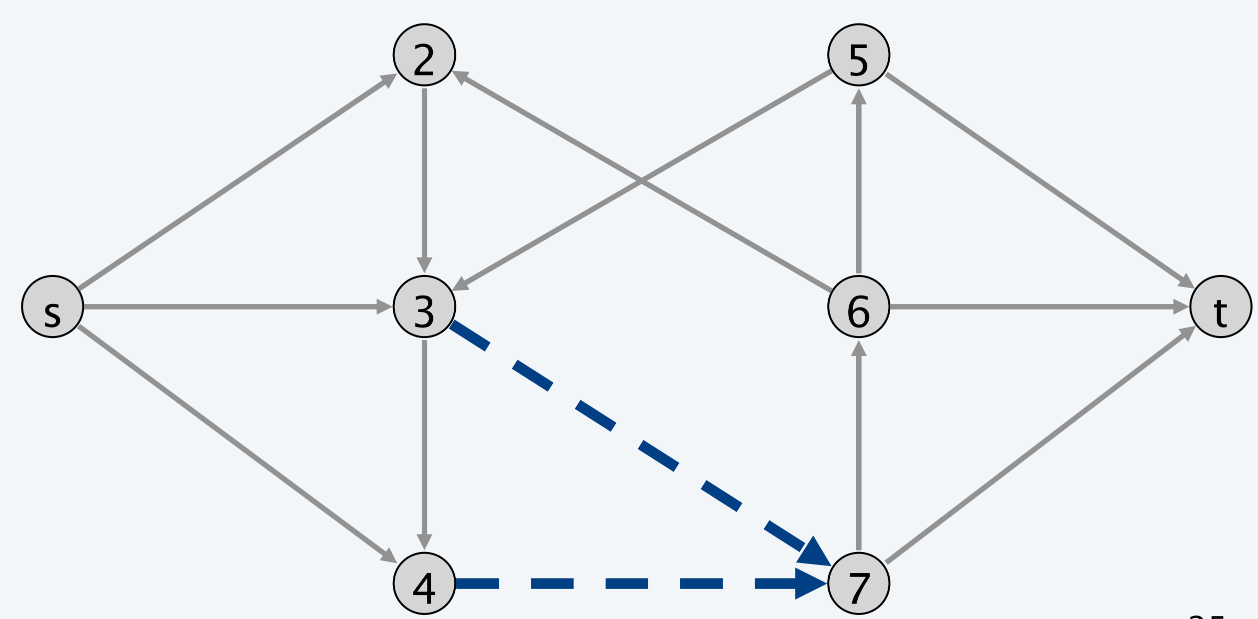
Teorema de Menger

Teorema. [Menger 1927] El número máximo de caminos $s \leadsto t$ separados por aristas
es igual al número mínimo de aristas cuya eliminación desconecta t de s.

Pf. $\leq$

- Supongamos que la eliminación de $F \subseteq E$ desconecta t de s, y $|F| = k$.
- Cada $s \leadsto t$ ruta utiliza al menos una arista en F.
- Por tanto, el número de caminos disjuntos por arista es $\leq$ k. ▪



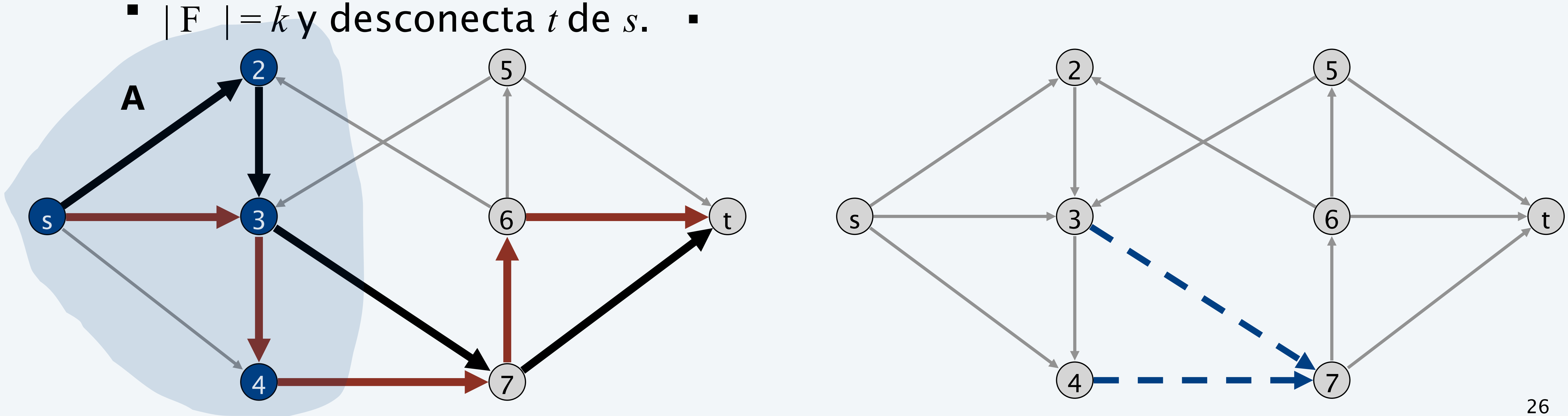


Teorema de Menger

Teorema. [Menger 1927] El número máximo de caminos $s \leadsto t$ separados por aristas
es igual al número mínimo de aristas cuya eliminación desconecta t de s.

Pf. $\geq$

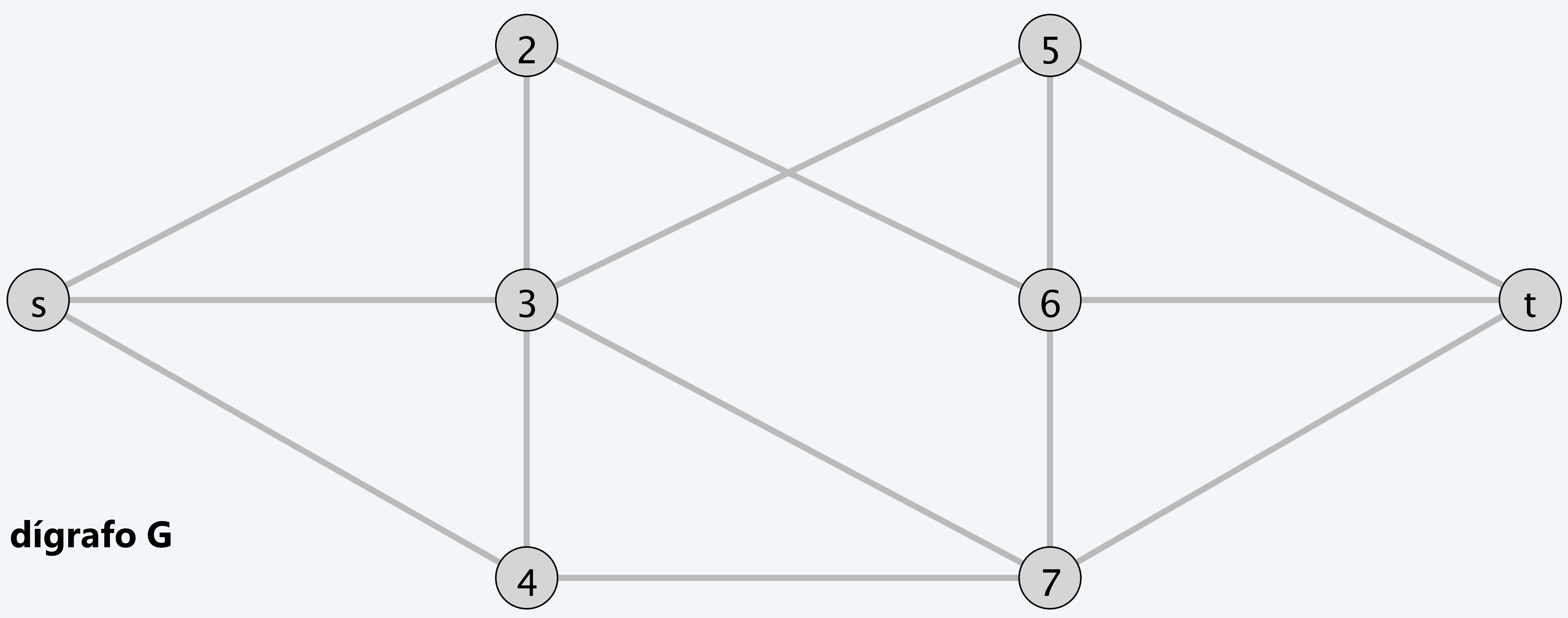
- Supongamos que el número máximo de caminos de aristas disjuntas es k.
- Entonces valor del caudal máximo $= \mathrm{k}$.
- Teorema max-flow min-cut $\Rightarrow$ existe un corte (A, B) de capacidad k.
- Sea F el conjunto de aristas que van de A a B.
- $|\mathrm{F}| = k$ y desconecta t de s. ▪



Trayectorias de aristas disjuntas en grafos no dirigidos

Def. Dos trayectorias son disjuntas si no tienen ninguna arista en común.

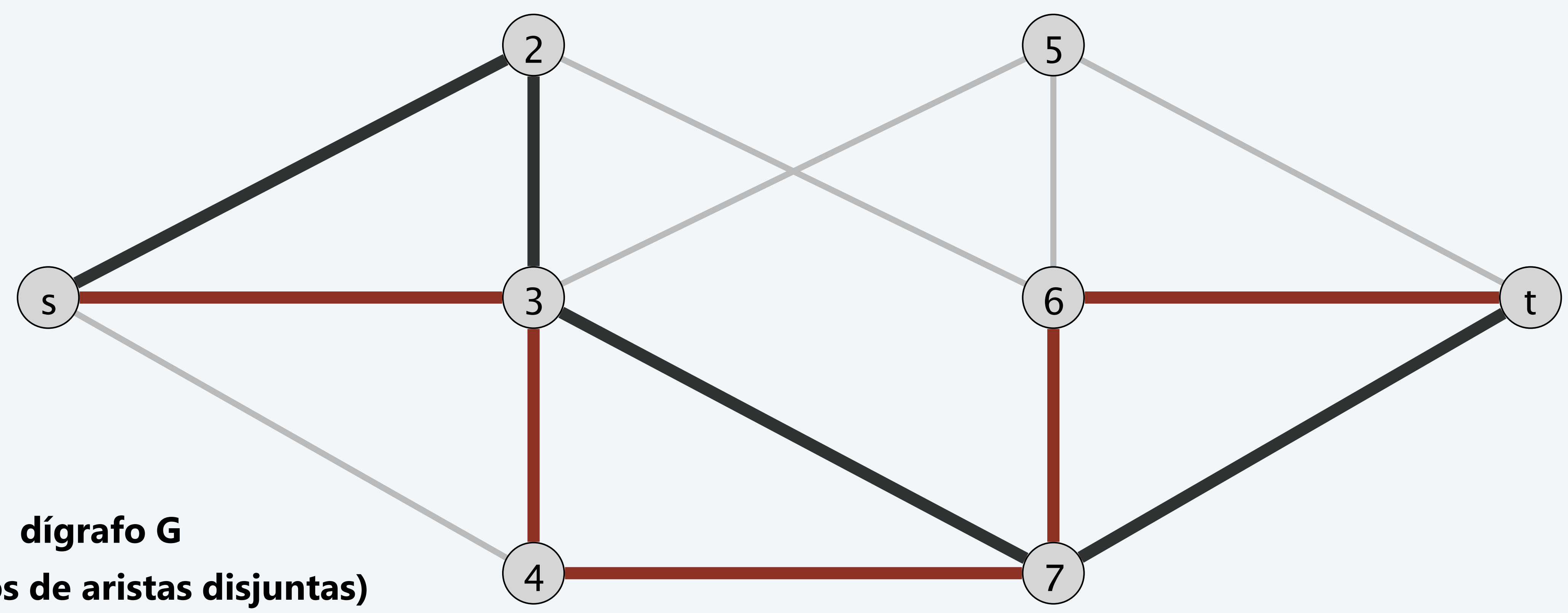
Problema de caminos disjuntos en grafos no dirigidos. Dado un grafo $G = (V, E)$ y dos nodos s y t, hallar el número máximo de caminos s-t con aristas disjuntas.



Trayectorias de aristas disjuntas en grafos no dirigidos

Def. Dos trayectorias son disjuntas si no tienen ninguna arista en común.

Problema de caminos disjuntos en grafos no dirigidos. Dado un grafo $G = (V, E)$ y dos nodos s y t, hallar el número máximo de caminos s-t con aristas disjuntas.

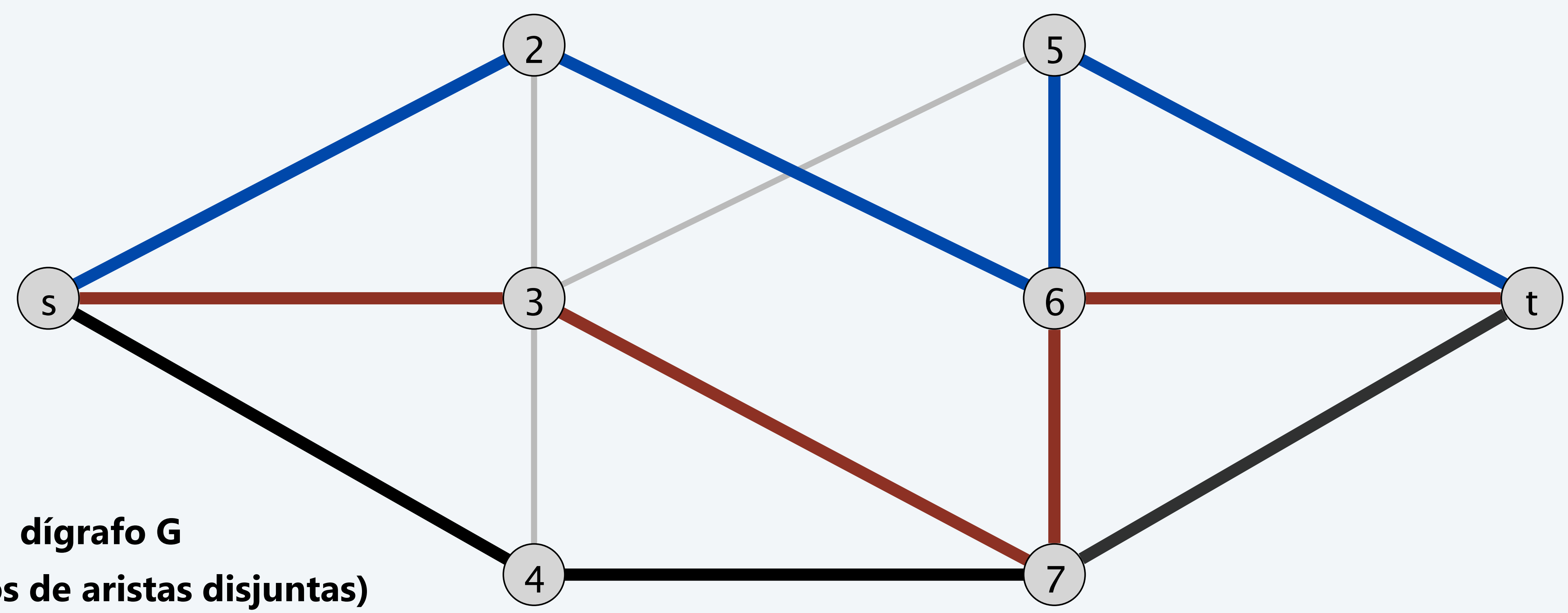


dígrafo G
(2 caminos de aristas disjuntas)

Trayectorias de aristas disjuntas en grafos no dirigidos

Def. Dos trayectorias son disjuntas si no tienen ninguna arista en común.

Problema de caminos disjuntos en grafos no dirigidos. Dado un grafo $G = (V, E)$ y dos nodos s y t, hallar el número máximo de caminos s-t con aristas disjuntas.



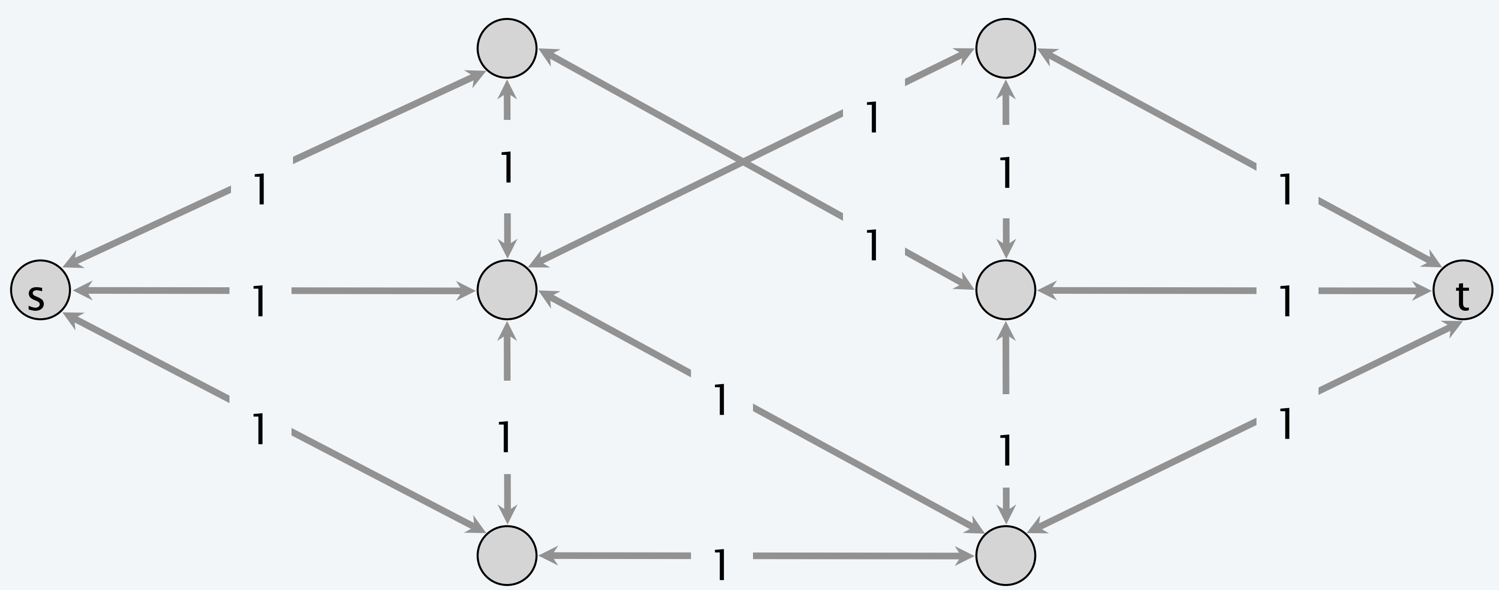
dígrafo G
(3 caminos de aristas disjuntas)

Trayectorias de aristas disjuntas en grafos no dirigidos

Formulación de flujo máximo. Sustituye cada arista por dos aristas antiparalelas y asigna capacidad unitaria a cada arista.

Observación. Dos caminos P_1 y P_2 pueden ser arista-disociados en el dígrafo pero no arista-disociados en el grafo no dirigido.

si P_1 utiliza la arista (u, v)
y P_2 utiliza su arista antiparalela (v, u)



Trayectorias de aristas disjuntas en grafos no dirigidos

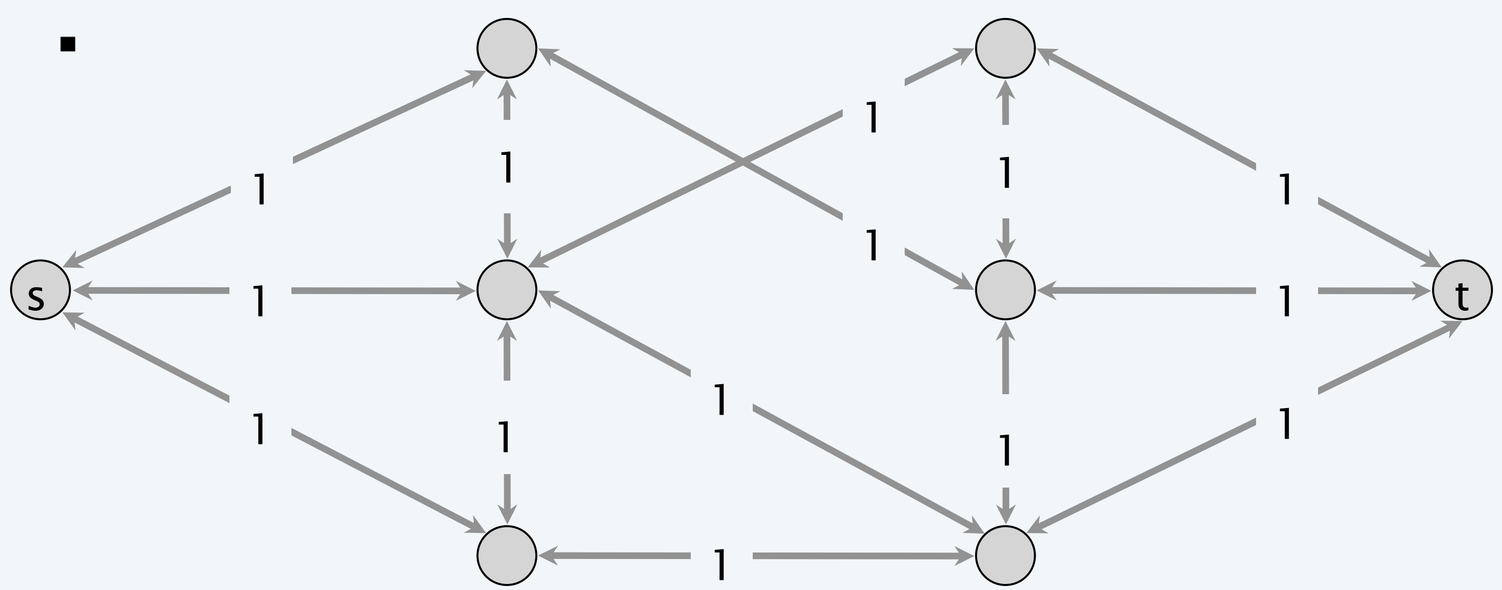
Formulación de flujo máximo. Sustituye cada arista por dos aristas antiparalelas y asigna capacidad unitaria a cada arista.

Lemma. En cualquier grafo de flujo, existe un flujo máximo f en el que para cada par de aristas antiparalelas e y $\boldsymbol{e'}$, o bien $f(e) = 0$ o bien $f(\boldsymbol{e'}) = 0$ o bien ambas.

Además, el teorema de integralidad sigue siendo válido.

Pf. [por inducción en el número de tales pares de aristas antiparalelas]

- Supongamos $f(e) > 0$ y $f(\boldsymbol{e'}) > 0$ para un par de aristas antiparalelas e y $\boldsymbol{e'}$.
- Establezca $f(e) = f(e) - \delta$ y $f(\boldsymbol{e'}) = f(\boldsymbol{e'}) - \delta$, donde $\delta = \min\{f(e), f(\boldsymbol{e'})\}$.
- f sigue siendo un flujo del mismo valor, pero tiene un par de este tipo menos. ▪

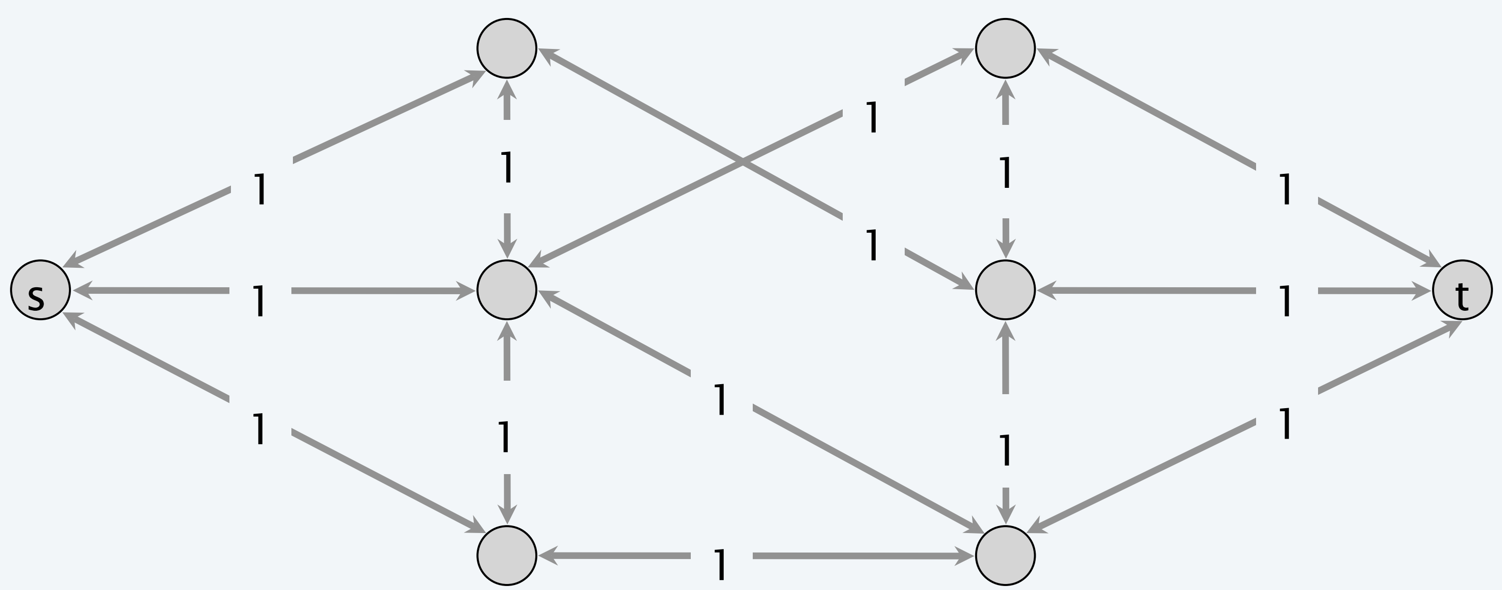


Trayectorias de aristas disjuntas en grafos no dirigidos

Formulación de flujo máximo. Sustituye cada arista por dos aristas antiparalelas y asigna capacidad unitaria a cada arista.

Lemma. En cualquier grafo de flujo, existe un flujo máximo f en el que para cada par de aristas antiparalelas e y $\boldsymbol{e'}$, o bien $f\,(e) = 0$ o bien $f\,(\boldsymbol{e'}) = 0$ o bien ambas.
Además, el teorema de integralidad sigue siendo válido.

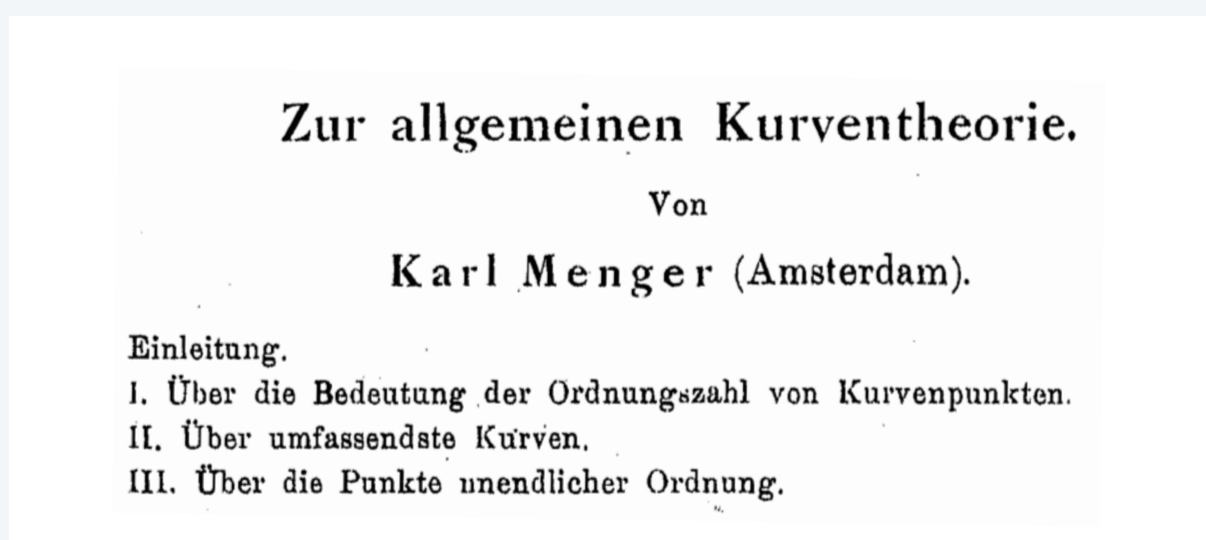
Teorema. El número máximo de caminos $s \rightsquigarrow t$ separados por aristas es igual al valor del flujo máximo.
Pf. Similar a la prueba en dígrafos; usar lema.



Teorema. Dado un grafo no dirigido con dos nodos s y t, el número máximo de caminos de aristas disjuntas s-t es igual al número mínimo de aristas cuya eliminación desconecta s y t.

Teorema. Dado un grafo no dirigido con dos nodos no adyacentes s y t, el número máximo de caminos s-t internamente disjuntos es igual al número mínimo de nodos internos cuya eliminación desconecta s y t.

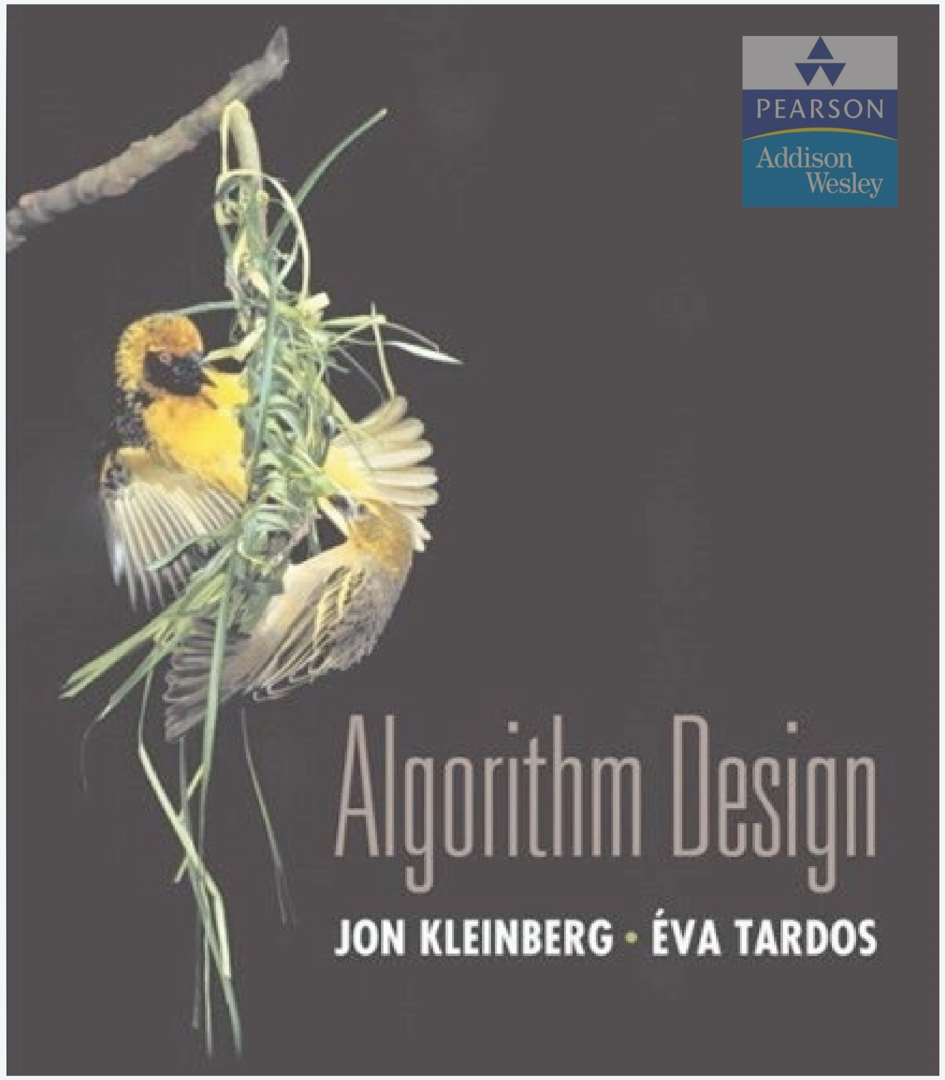
Teorema. Dado un grafo dirigido con dos nodos no adyacentes s y t, el número máximo de caminos $s \leadsto t$ internamente disjuntos es igual al número mínimo de nodos internos cuya eliminación desconecta t de s.


Zur allgemeinen Kurventheorie.

Von

Karl Menger (Amsterdam).

Einleitung.
I. Über die Bedeutung der Ordnungszahl von Kurvenpunkten.
II. Über umfassendste Kurven.
III. Über die Punkte unendlicher Ordnung.



APARTADO 7.7

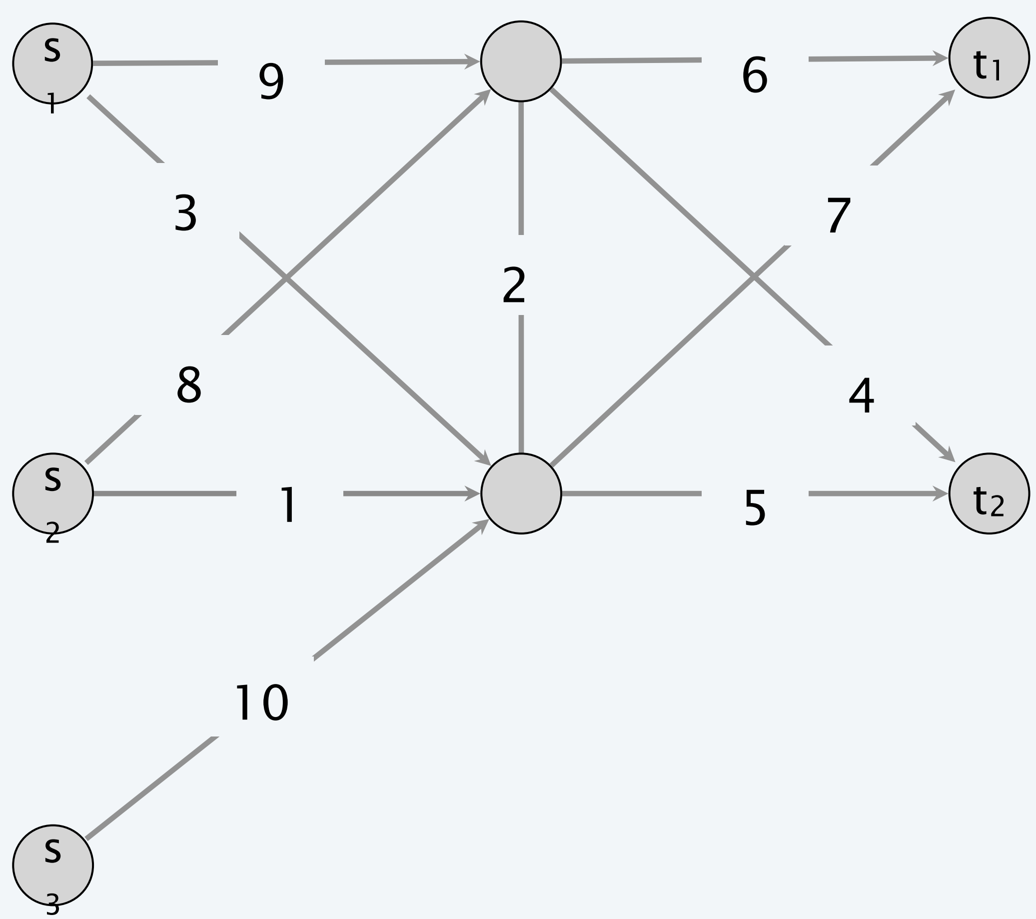
7. FLUJO DE RED II

- *emparejamiento bipartito*
- *caminos disjuntos*
- *extensiones a caudal máximo*
- *diseño de encuestas*
- *programación de vuelos*
- *segmentación de imágenes*
- *selección de proyectos*
- *eliminación del béisbol*

Múltiples fuentes y sumideros

Def. Dado un dígrafo $G = (V, E)$ con capacidades de arista no negativas $c(e)$ y múltiples nodos origen y múltiples nodos sumidero, hallar el flujo máximo que
pueden enviarse desde los nodos fuente a los nodos sumidero.

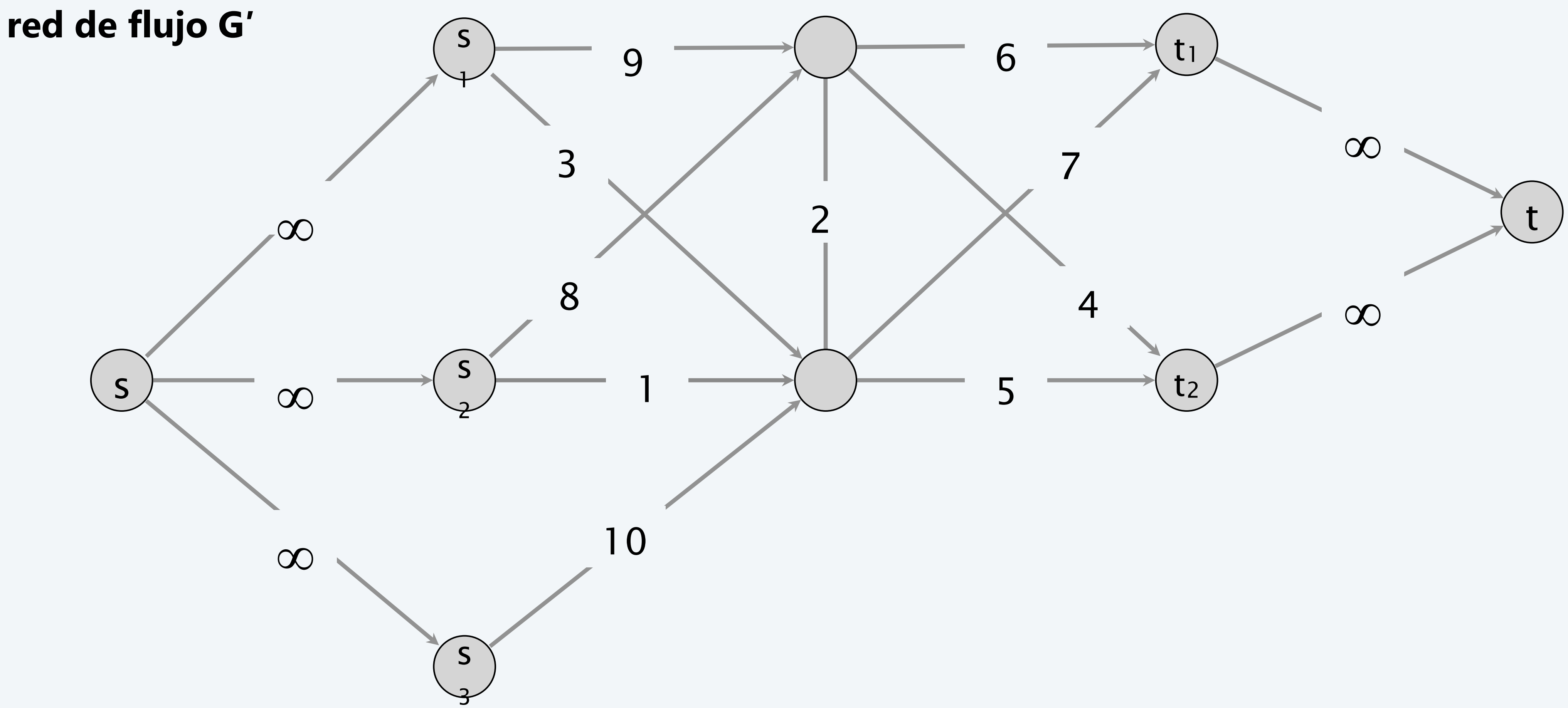
red de flujo G



Múltiples fuentes y sumideros: formulación de flujo máximo

- Añade un nuevo nodo de origen s y un nodo de destino t.
- Para cada nodo fuente original s_i añade una arista (s, s_i) con capacidad ∞.
- Para cada nodo sumidero original t_j , añade una arista (t_j , t) con capacidad ∞.

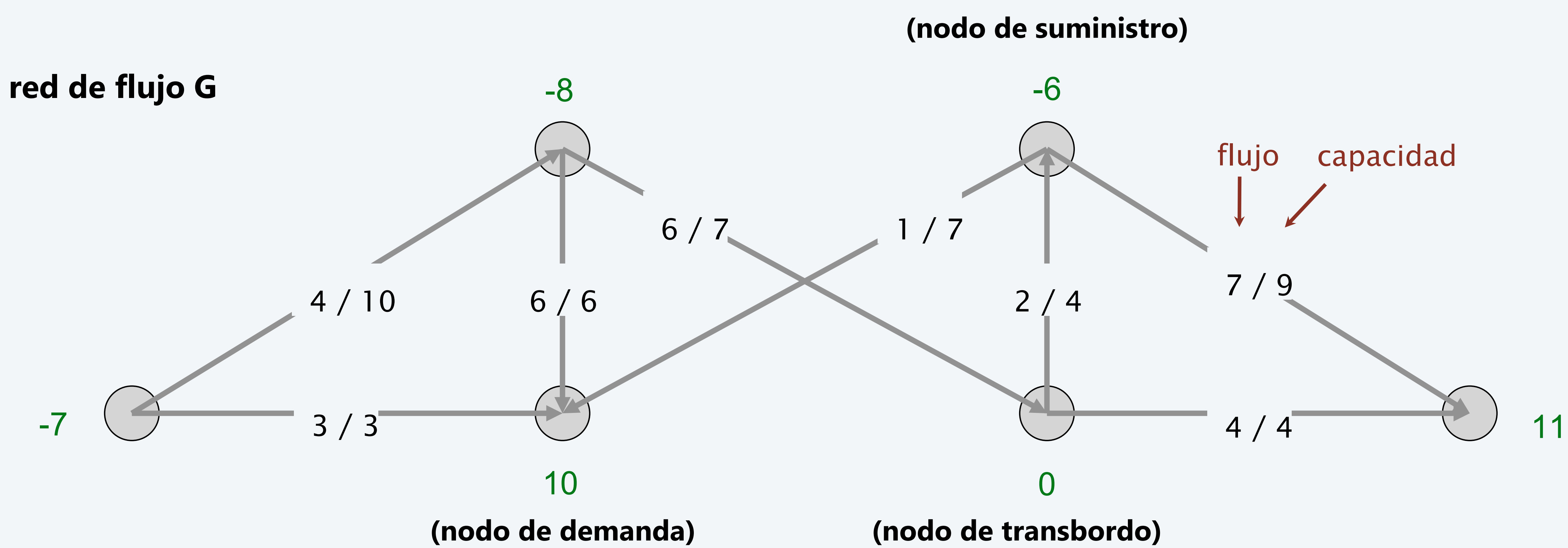
Afirmación. Correspondencia 1-1 entre flujos en G y G'.



Circulación con demandas

Def. Dado un dígrafo $G = (V, E)$ con capacidades de arista no negativas $c(e)$ y oferta y demanda de nodos $d(v)$, una circulación es una función que satisface:

- Para cada $e \in E$: $0 \le f(e) \le c(e)$ (capacidad)
- Para cada $v \in V$: $\sum_{e \text{ in to } v} f(e) - \sum_{e \text{ out of } v} f(e) = d(v)$ (conservación)

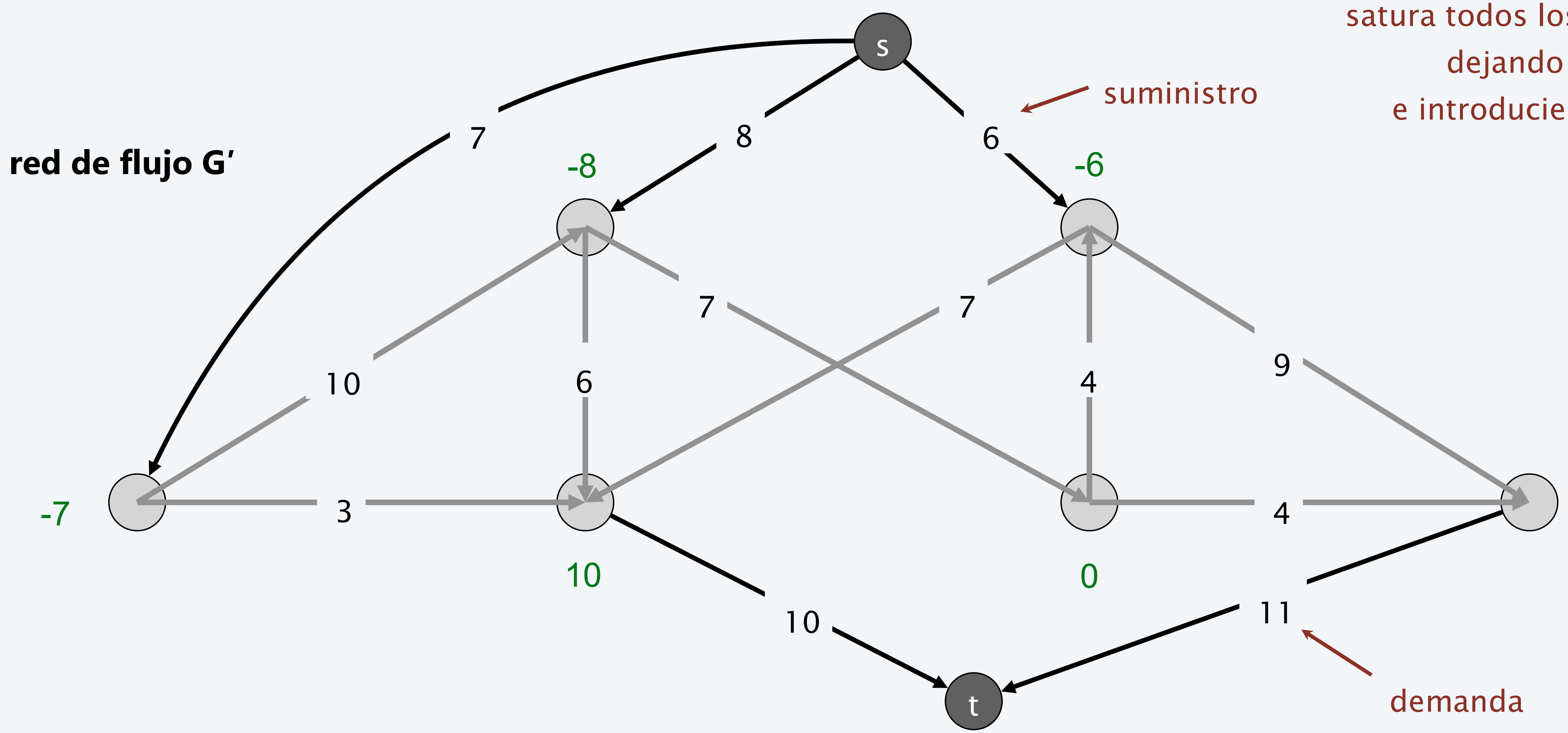


Circulación con demandas: formulación de flujo máximo

- Añade una nueva fuente s y un nuevo sumidero t.
- Para cada v con $d(v) < 0$, añade la arista (s, v) con capacidad $-d(v)$.
- Para cada v con $d(v) > 0$, añade la arista (v, t) con capacidad d(v).

Afirmación. G tiene circulación si $\boldsymbol{G'}$ tiene flujo máximo de valor $D = \sum_{v\,:\,d(v)>0} d(v) = \sum_{v\,:\,d(v)<0} -d(v)$

satura todos los bordes dejando s
e introduciendo t



Circulación con demandas

Teorema de integralidad. Si todas las capacidades y demandas son enteras, y existe una circulación, entonces existe una que es de valor entero.

Pf. Se deduce de la formulación de flujo máximo + teorema de integralidad para flujo máximo.

Teorema. Dado (V, E, c, d), no existe circulación si existe una partición de nodos (A, B) tal que $\Sigma_{v \in B}\ \mathrm{d}(v) > cap(A, B)$.

la demanda de los nodos de B supera
suministro de nodos en B más
capacidad máxima de las aristas que van de A a B

Pf sketch. Mira el corte min en $\mathbf{G'}$.

Circulación factible.

- Grafo dirigido $G = (V, E)$.
- Capacidades de las aristas $c(e)$ y límites inferiores $\ell(e)$ para cada arista $e \in E$.
- Oferta y demanda de los nodos $d(v)$ para cada nodo $v \in V$.

Def. Una circulación es una función que satisface:

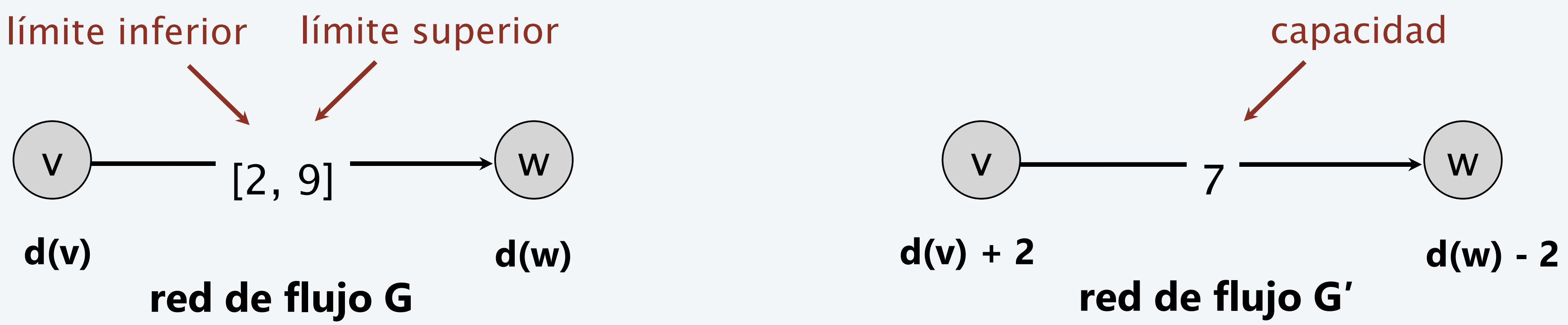
- Para cada $e \in E$: $\ell(e) \leq f(e) \leq c(e)$ (capacidad).
- Para cada $v \in V$: $\sum_{e \text{ in to } v} f(e) - \sum_{e \text{ out of } v} f(e) = d(v)$ (conservación)

Problema de circulación con límites inferiores. Dados (V, E, ℓ, c, d), ¿existe una circulación factible?

Circulación con exigencias y límites inferiores

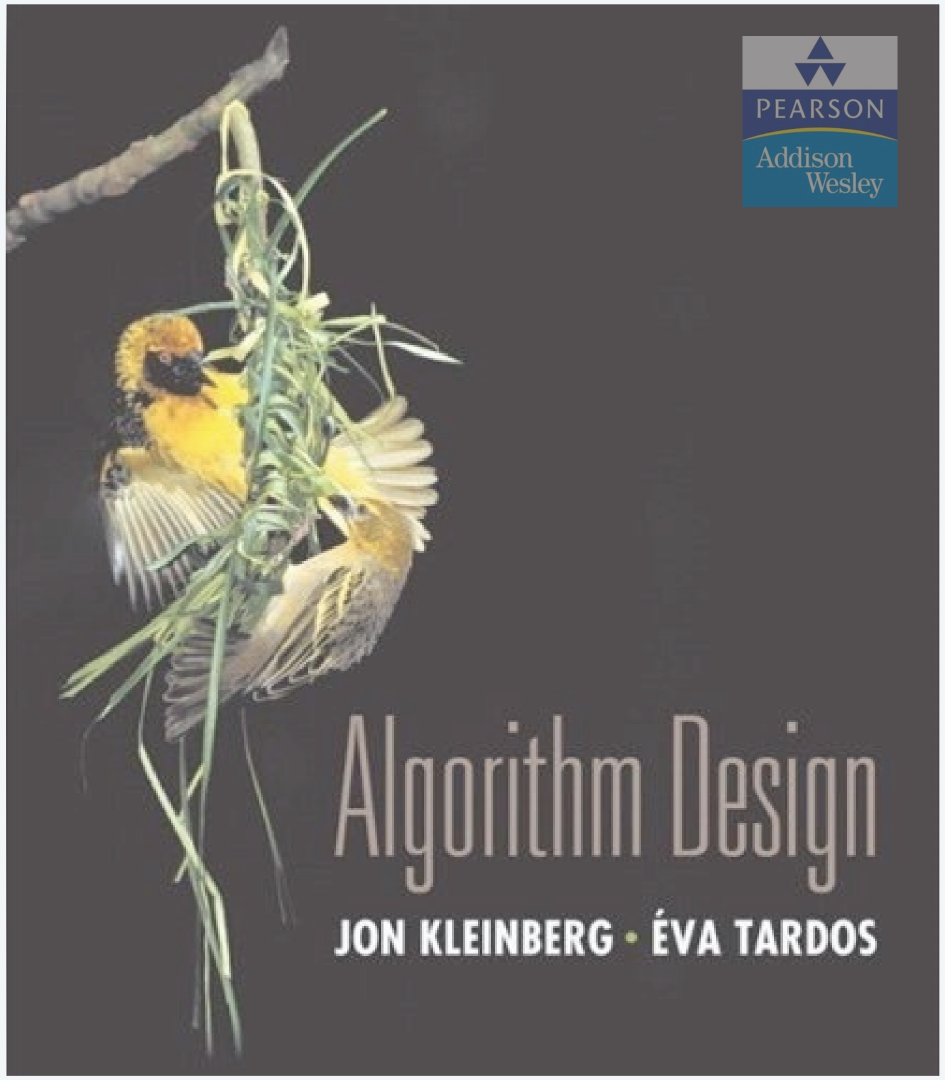
Formulación de flujo máximo. Modelo de límites inferiores como circulación con demandas.

- Envía $\ell(e)$ unidades de flujo a lo largo de la arista e.
- Actualiza las demandas de ambos extremos.



Teorema. Existe una circulación en G si existe una circulación en $\mathbf{G'}$. Además, si todas las demandas, capacidades y límites inferiores en G son enteros, entonces hay una circulación en G que es de valor entero.

Pf sketch. $f(e)$ es una circulación en G si $f'(e) = f(e) - \ell(e)$ es una circulación en $\mathbf{G'}$.



SECCIÓN 7.8

7. FLUJO DE RED II

- *emparejamiento bipartito*
- *caminos disjuntos*
- *extensiones a caudal máximo*
- *diseño de encuestas*
- *programación de vuelos*
- *segmentación de imágenes*
- *selección de proyectos*
- *eliminación del béisbol*

Diseño de la encuesta

- Diseñar una encuesta en la que se pregunte a n_1 consumidores sobre n_2 productos.

una pregunta de la encuesta por producto

- Puede encuestar al consumidor i sobre el producto j sólo si lo posee.
- Haga preguntas al consumidor i entre c_i y c_i'.
- Pregunta entre p_j y p_j' consumidores sobre el producto j.

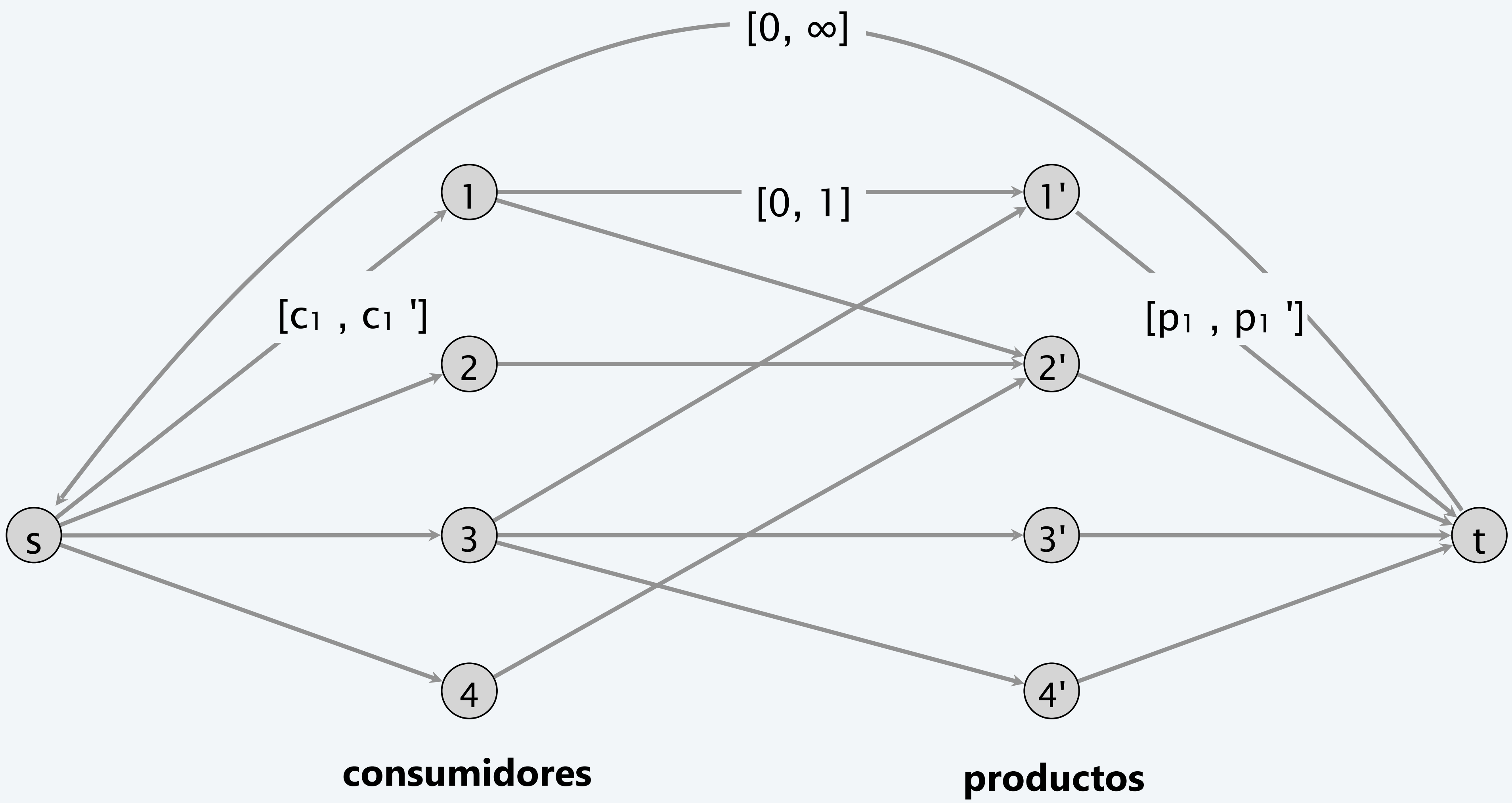
Objetivo. Diseñe una encuesta que cumpla estas especificaciones, si es posible.

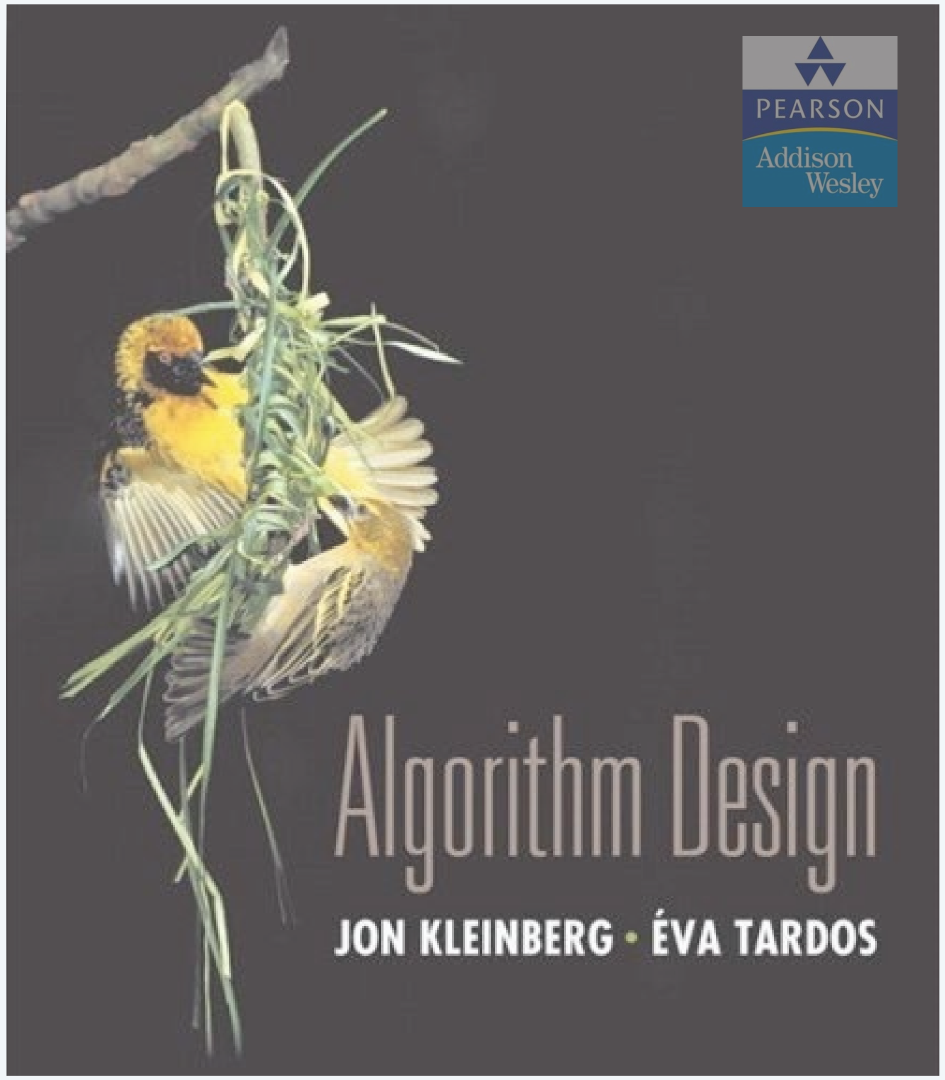
Emparejamiento perfecto bipartito. Caso especial cuando $c_i = c_i' = p_j = p_j' = 1$.

Diseño de la encuesta

Formulación de flujo máximo. Modelo como problema de circulación con límites inferiores.

- Añade la arista (i, j) si el consumidor j posee el producto i.
- Añadir arista de s al consumidor j .
- Añadir arista del producto i a t.
- Añadir arista de t a s.
- Circulación entera ⇔ diseño factible de la encuesta.





APARTADO 7.9

7. FLUJO DE RED II

- *emparejamiento bipartito*
- *caminos disjuntos*
- *extensiones a caudal máximo*
- *diseño de encuestas*
- *programación de vuelos*
- *segmentación de imágenes*
- *selección de proyectos*
- *eliminación del béisbol*

Programación de vuelos.

- Complejo problema computacional al que se enfrentan las compañías aéreas.
- Debe elaborar programas eficientes en términos de uso de equipos, asignación de personal a y satisfacción del cliente.

incluso en presencia de acontecimientos imprevisibles, como tiempo y averías

- Uno de los mayores consumidores de técnicas algorítmicas de alta potencia

.

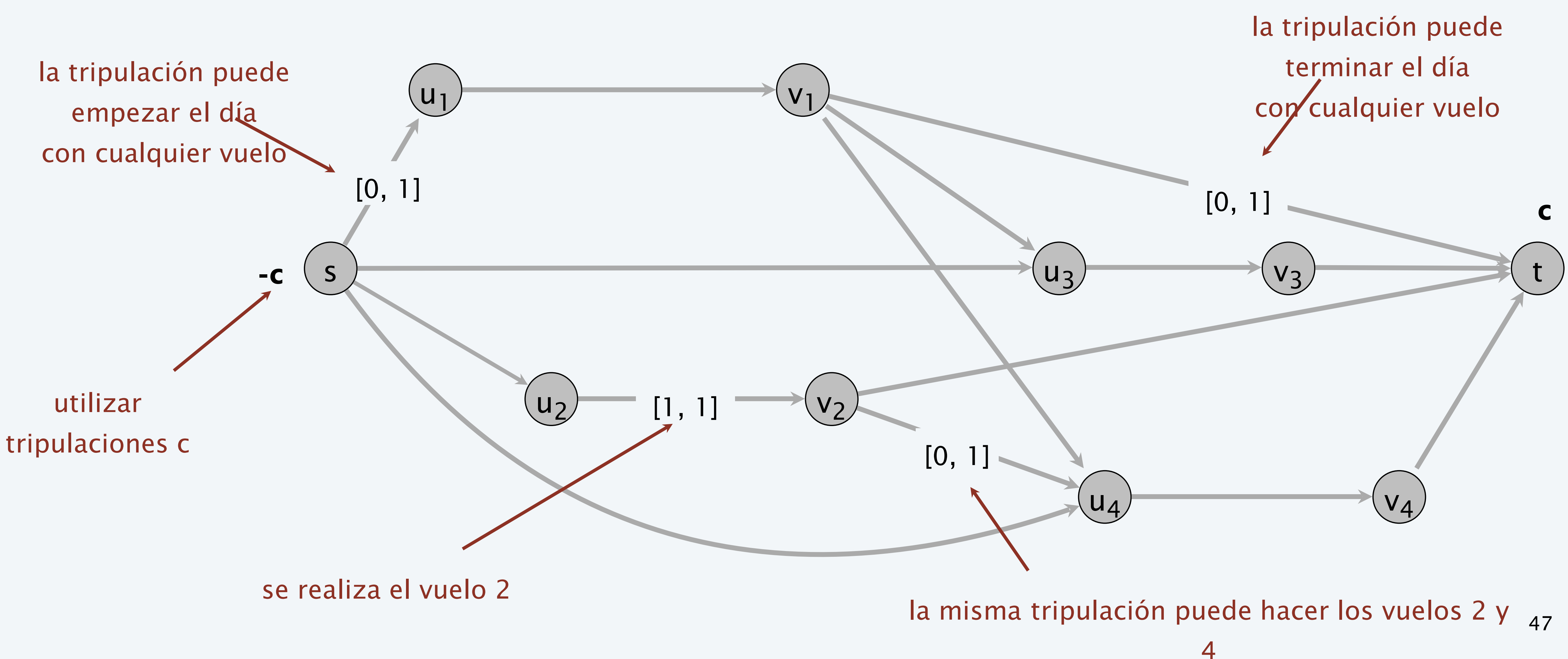
"Problema de juguetes".

- Gestione las tripulaciones de vuelo reutilizándolas en varios vuelos.
- Entrada: conjunto de k vuelos para un día determinado.
- El vuelo i sale del origen o_i a la hora s_i y llega al des d_i a la hora f_i.
- Minimizar el número de tripulaciones de vuelo.

Programación de vuelos

Formulación de circulación. [para ver si las tripulaciones c son suficientes]

- Para cada vuelo i, incluye dos nodos u_i y v .$_i$
- Añadir fuente s con demanda $-c$, y aristas (s, u_i) con capacidad 1.
- Añadir el sumidero t con demanda c, y aristas (v_i, t) con capacidad 1.
- Para cada i, añade la arista (u_i, v_i) con límite inferior y capacidad 1.
- si el vuelo j es alcanzable desde i, añadir arista (v_i, u_j) con capacidad 1.



Programación de vuelos: tiempo de funcionamiento

Teorema. El problema de programación de líneas aéreas puede resolverse en tiempo $O(k^3 \log k)$.

Pf.

- k = número de vuelos.
- c = número de tripulaciones (desconocido).
- $O(k)$ nodos, $O(k^2)$ aristas.
- Como mucho se necesitan k cuadrillas. ← búsqueda binaria del valor óptimo c*
  ⇒ resolver $\lg k$ problemas de circulación.
- El valor del flujo está comprendido entre 0 y k.
  ⇒ como máximo k aumentos por problema de circulación.
- Tiempo total = $O(k^3 \log k)$.

Observación. Puede resolverse en tiempo $O(k^3)$ formulándolo como un problema de flujo mínimo.

Programación de vuelos: postmortem

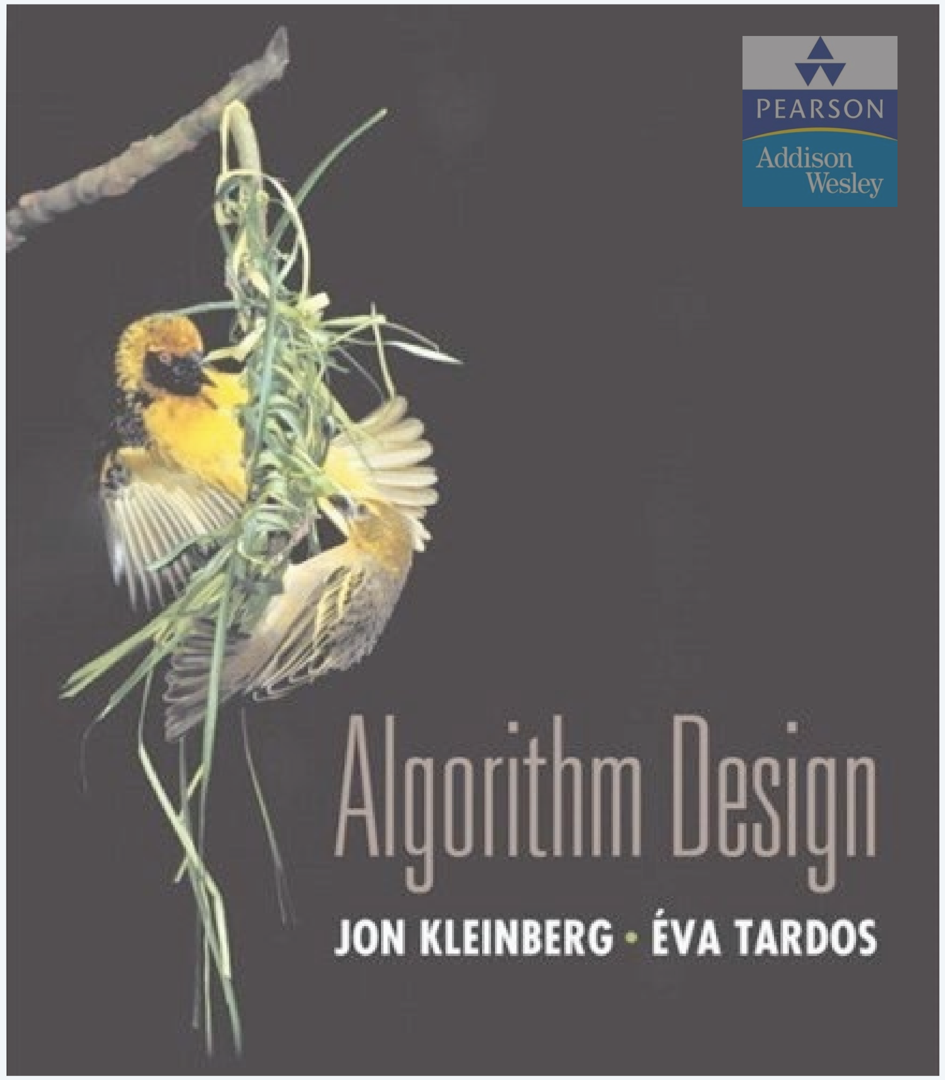
Observación. Hemos resuelto un problema de juguete.

Los modelos de problemas del mundo real presentan otros innumerables factores:

- Normativa sindical: por ejemplo, las tripulaciones de vuelo sólo pueden volar un determinado número de horas en un intervalo dado.
- Necesidad de una programación óptima a lo largo del horizonte de planificación, no sólo un día.
- La decoloración tiene un coste.
- Los vuelos no siempre salen o llegan a la hora prevista.
- Optimice simultáneamente el horario de los vuelos y la estructura de las tarifas.

Mensaje.

- Nuestra solución es una técnica generalmente útil para la reutilización eficiente de recursos limitados, pero trivializa el problema real de programación de líneas aéreas.
- Técnicas de flujo útiles para resolver problemas de programación de vuelos (y muy utilizadas en la práctica).
- Dirigir una aerolínea de forma eficiente es un problema muy difícil.



ARTÍCULO 7.10

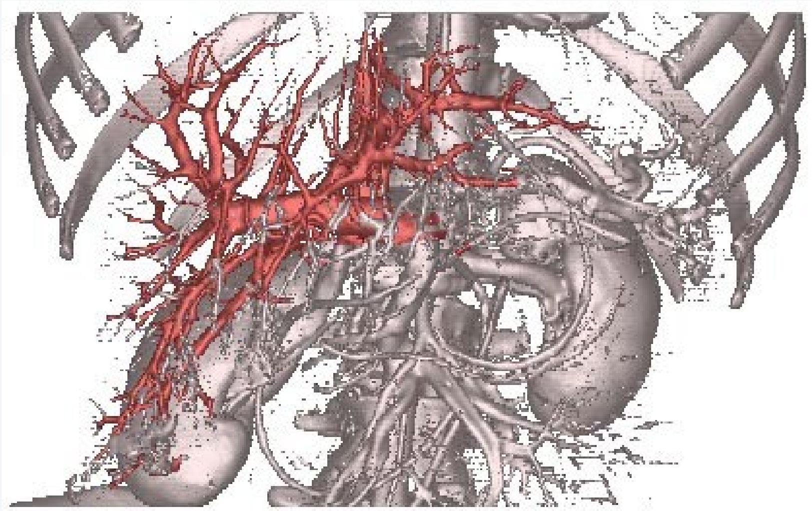
7. FLUJO DE RED II

- *emparejamiento bipartito*
- *caminos disjuntos*
- *extensiones a caudal máximo*
- *diseño de encuestas*
- *programación de vuelos*
- *segmentación de imágenes*
- *selección de proyectos*
- *eliminación del béisbol*

Segmentación de imágenes.

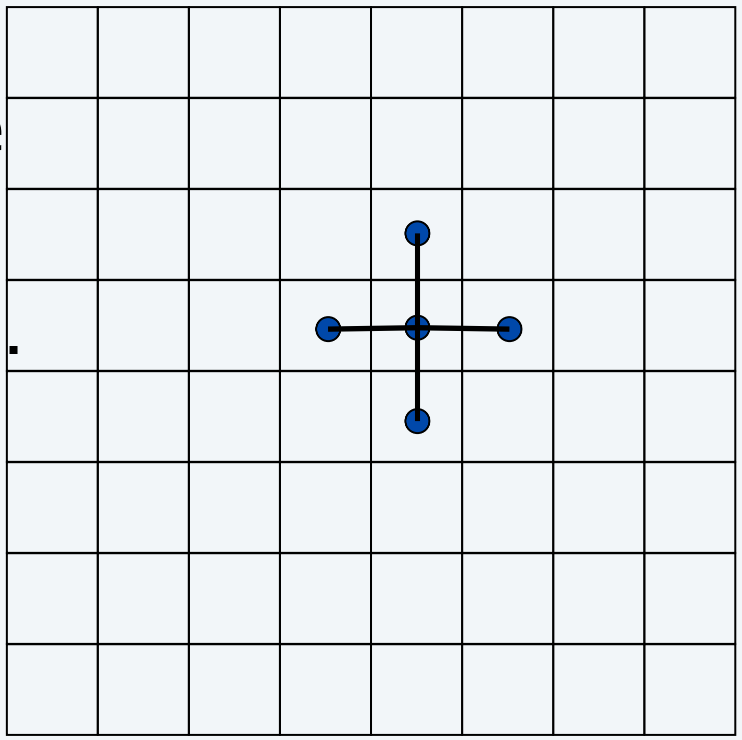
- Problema central en el tratamiento de imágenes.
- Divide la imagen en regiones coherentes.

Ej. Tres personas de pie delante de una escena de fondo compleja. Identifique a cada persona como un objeto coherente.



segmentación del hígado y de la vascularización hepática

Segmentación primer plano/fondo.



- Etiquete cada píxel de la imagen como perteneciente al primer plano o al fondo de.
- V = conjunto de píxeles, E = pares de píxeles vecinos.
- $a_i \geq 0$ es el píxel de probabilidad i en primer plano.
- $b_i \geq 0$ es el píxel i *de* probabilidad en el fondo.
- $p_{ij} \geq 0$ es la penalización de separación por etiquetar uno de i y j como primer plano, y el otro como fondo.

Objetivos.

- Precisión: si $a_i > b_i$ de forma aislada, prefiere etiquetar i en primer plano.
- Suavidad: si muchos vecinos de i están etiquetados en primer plano, deberíamos inclinarnos a etiquetar i como primer plano.
- Encuentra la partición (A, B) que maximiza:

$$\underbrace{\sum_{i \in A} a_i}_{\text{primer plano}} + \underbrace{\sum_{j \in B} b_j}_{\text{fondo}} - \sum_{\substack{(i,j) \in E \\ |A \cap \{i,j\}| = 1}} p_{ij}$$

Segmentación de imágenes

Formular como problema de minicorte.

- Maximización.
- Sin fuente ni sumidero.
- Grafo no dirigido.

Se convierte en un problema de minimización.

- Maximizar $$\sum_{i \in A} a_i + \sum_{j \in B} b_j - \sum_{\substack{(i,j) \in E \\ |A \cap \{i,j\}| = 1}} p_{ij}$$

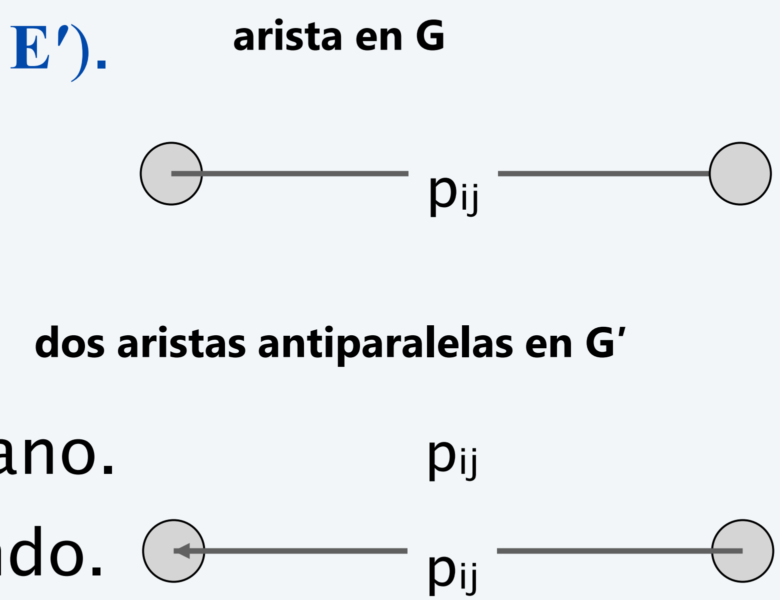
- es equivalente a minimizar $$\underbrace{\left(\sum_{i \in V} a_i + \sum_{j \in V} b_j\right)}_{\text{a constant}} - \sum_{i \in A} a_i - \sum_{j \in B} b_j + \sum_{\substack{(i,j) \in E \\ |A \cap \{i,j\}| = 1}} p_{ij}$$

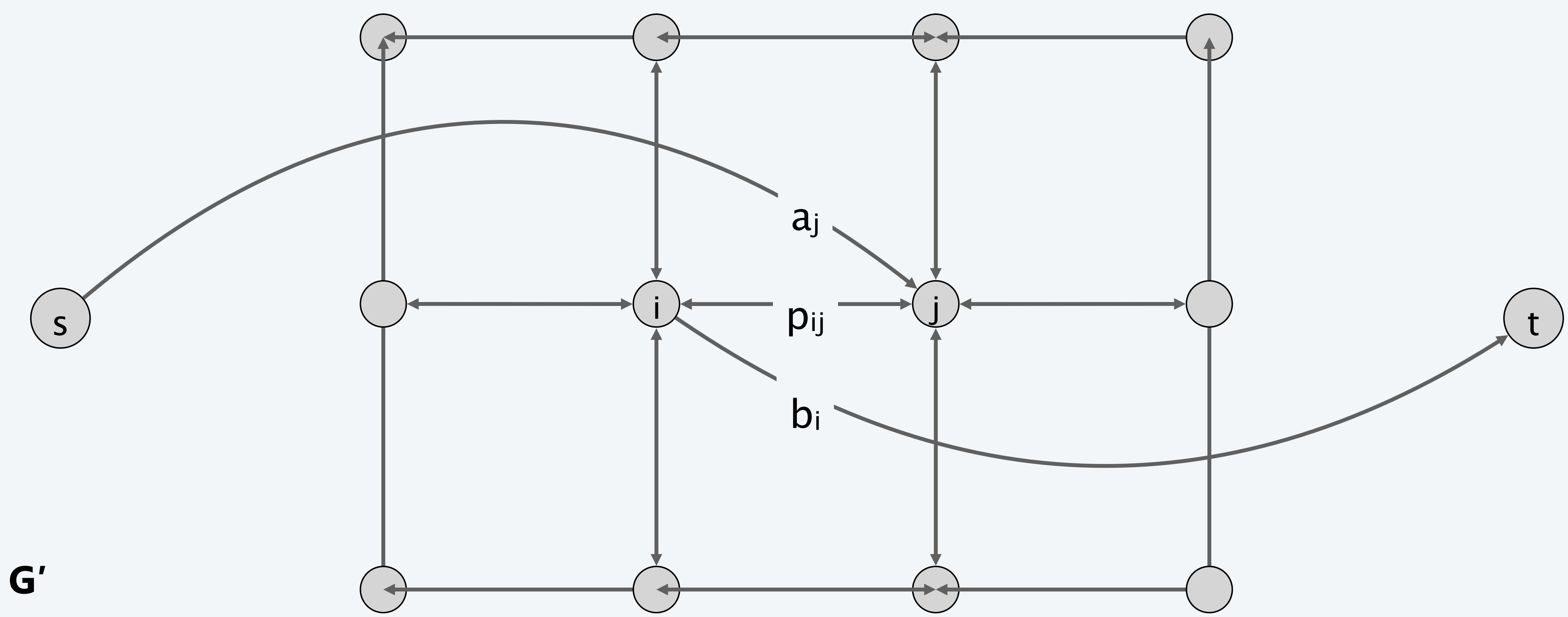
- o alternativamente $$\sum_{j \in B} a_j + \sum_{i \in A} b_i + \sum_{\substack{(i,j) \in E \\ |A \cap \{i,j\}| = 1}} p_{ij}$$

Segmentación de imágenes

Formular como problema de corte mínimo $G' = (V', E')$.

- Incluir nodo para cada píxel.
- Utilizar dos aristas antiparalelas en lugar de arista no dirigida.
- Añade la fuente s correspondiente al primer plano.
- Añadir fregadero t para que corresponda al fondo.





Segmentación de imágenes

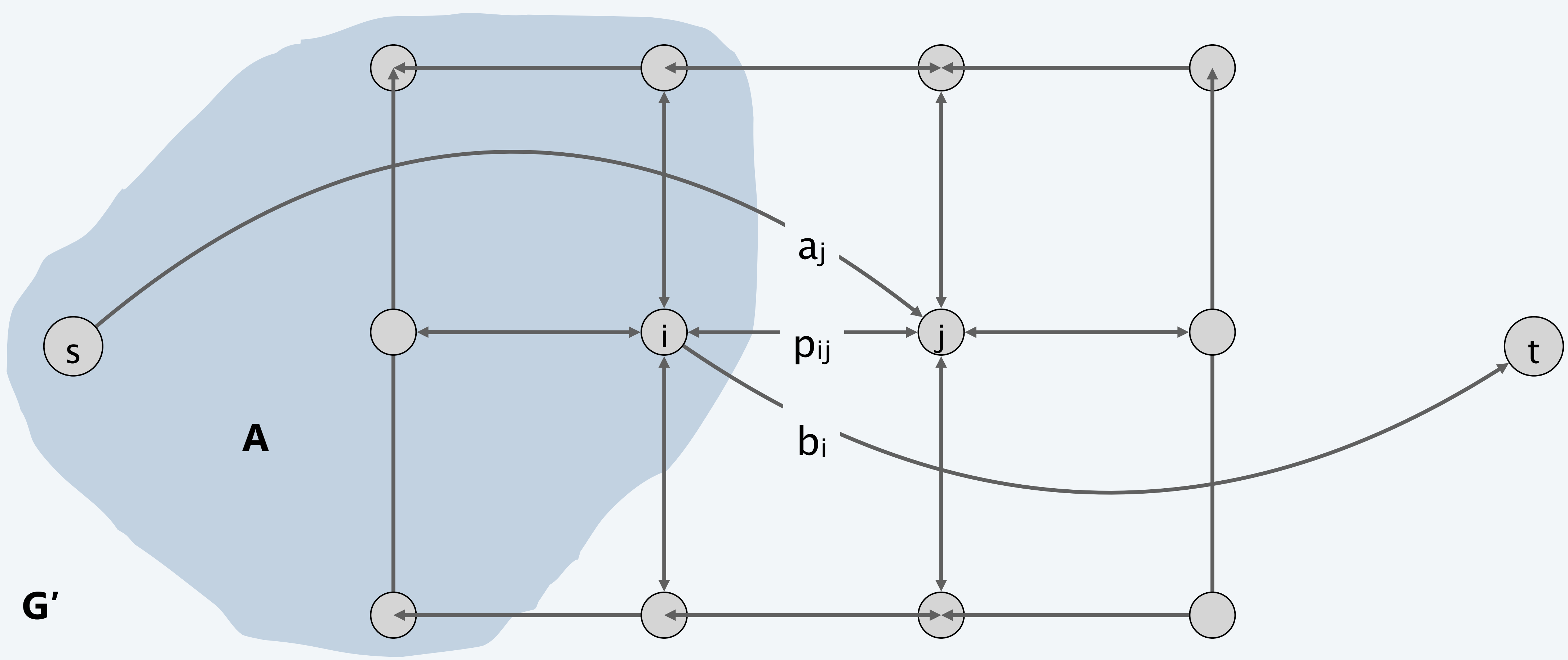
Consideremos el corte mínimo (A, B) en $\mathbf{G'}$.

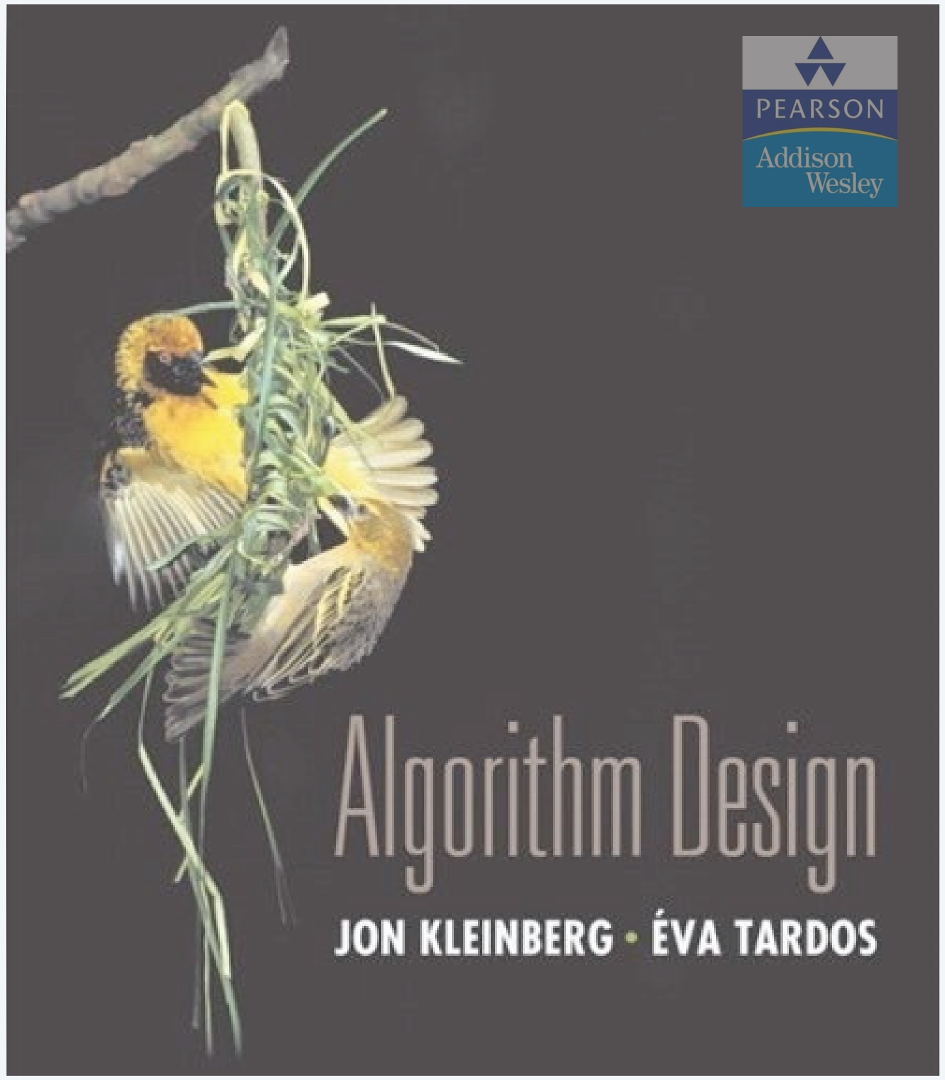
- $A =$ primer plano.

$$cap(A,B) \;=\; \sum_{j \in B} a_j + \sum_{i \in A} b_i \;+ \sum_{\substack{(i,j) \in E \\ i \in A,\ j \in B}} p_{ij}$$

si i y j están en lados diferentes, p_{ij} contado exactamente una vez

- Precisamente la cantidad que queremos minimizar.





ARTÍCULO 7.11

7. FLUJO DE RED II

- *emparejamiento bipartito*
- *caminos disjuntos*
- *extensiones a caudal máximo*
- *diseño de encuestas*
- *programación de vuelos*
- *segmentación de imágenes*
- *selección de proyectos*
- *eliminación del béisbol*

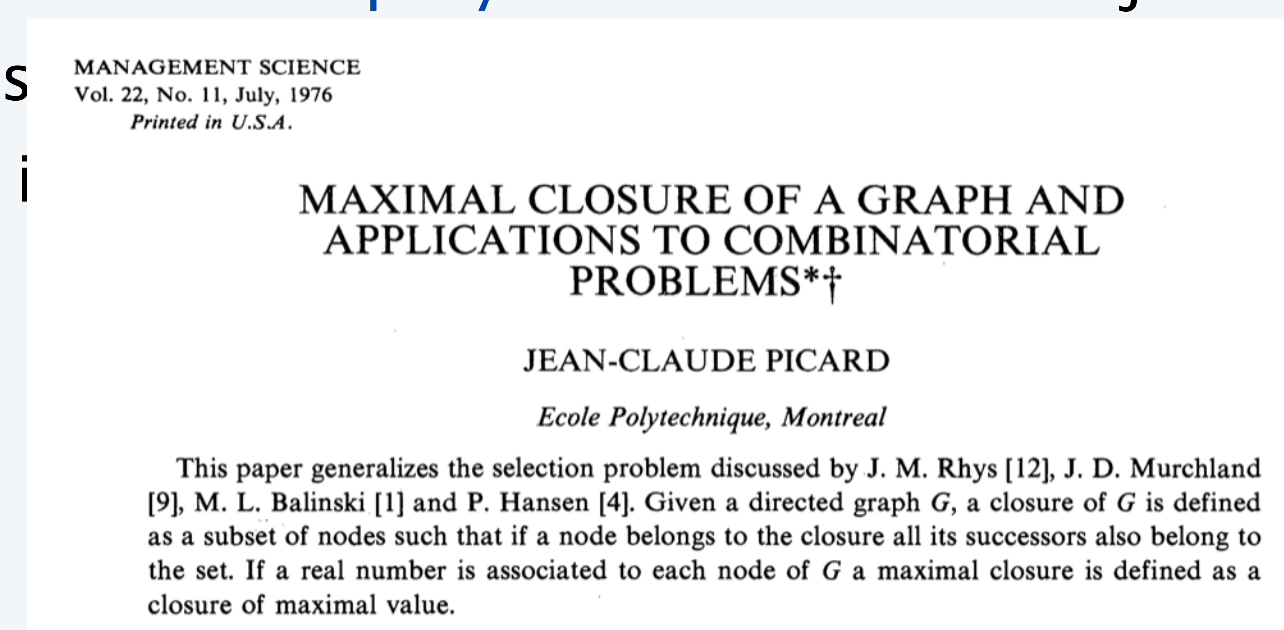
Selección de proyectos (problema de cierre de peso máximo)

Proyectos con requisitos previos.

puede ser positivo o negativo

- Conjunto de proyectos posibles P : el proyecto v tiene unos ingresos asociados p_v.
- Conjunto de prerrequisitos E : si $(v, w) \in E$, no se puede hacer el proyecto v a menos que
  también haga el proyecto w.
- Un subconjunto de proyectos $A \subseteq P$ es factible si el prerrequisito de cada proyecto en A también pertenece a A.

Problema de selección de proyectos. Dado un conjunto de proyectos P y unos requisitos … de proyectos para maximizar los i…


MANAGEMENT SCIENCE
Vol. 22, No. 11, July, 1976
Printed in U.S.A.

MAXIMAL CLOSURE OF A GRAPH AND APPLICATIONS TO COMBINATORIAL PROBLEMS*†

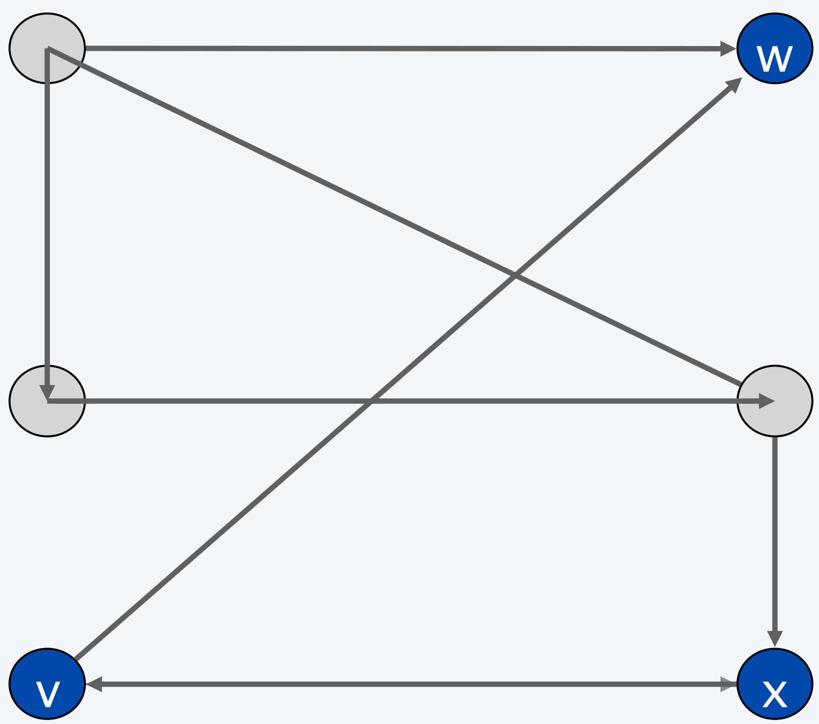
JEAN-CLAUDE PICARD

Ecole Polytechnique, Montreal

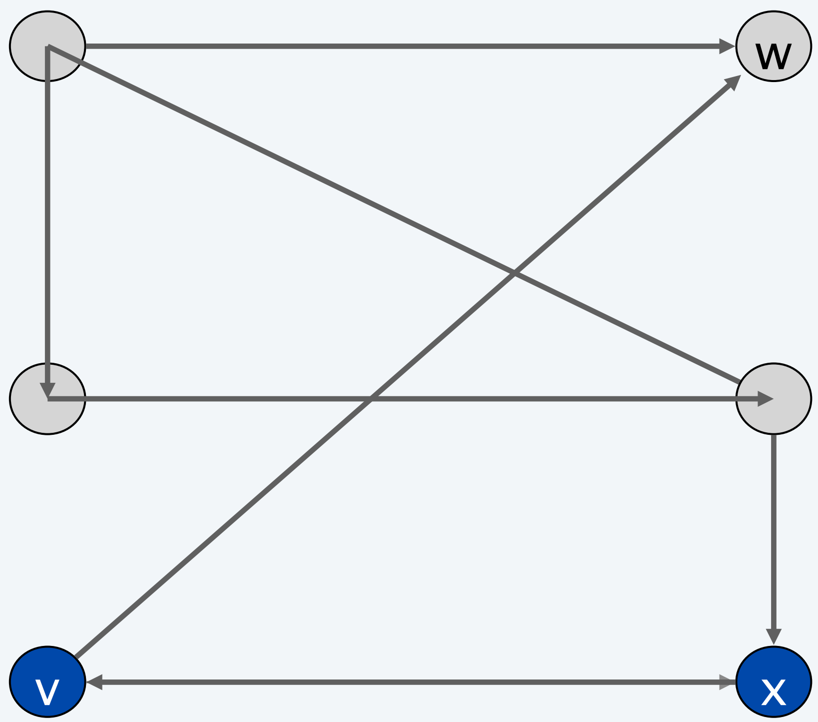
This paper generalizes the selection problem discussed by J. M. Rhys [12], J. D. Murchland [9], M. L. Balinski [1] and P. Hansen [4]. Given a directed graph G, a closure of G is defined as a subset of nodes such that if a node belongs to the closure all its successors also belong to the set. If a real number is associated to each node of G a maximal closure is defined as a closure of maximal value.

Selección de proyectos: gráfico de requisitos previos

Prerrequisito gráfico. Añadir arista (v, w) si no se puede hacer v sin hacer también w.



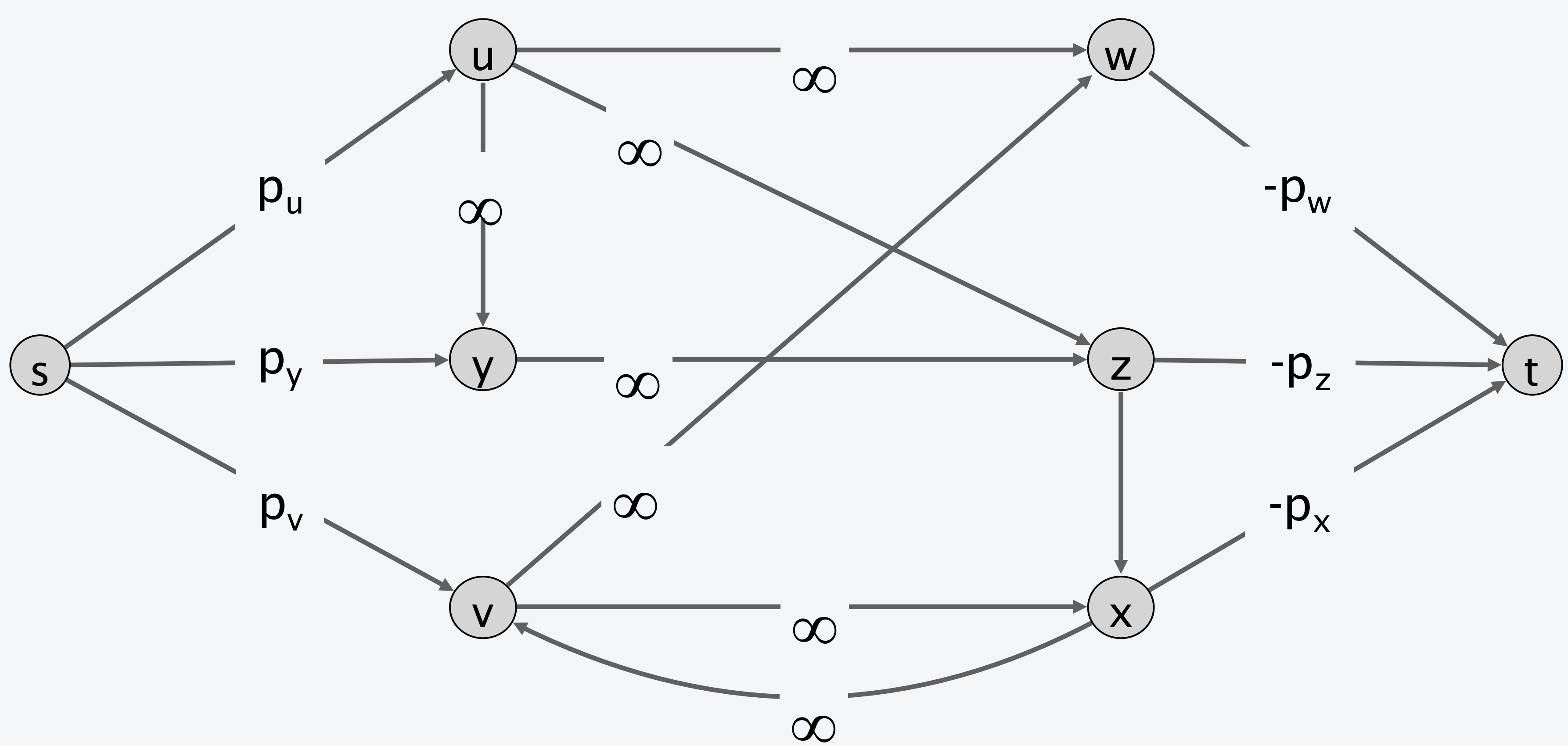
{ v, w, x } es factible



{ v, x } es inviable

Formulación minicorte.

- Asigna una capacidad de ∞ a cada arista prerrequisito.
- Añadir arista (s, v) con capacidad p_v si $p_v > 0$.
- Añade la arista (v, t) con capacidad $-p_v$ si $p_v < 0$.
- Para mayor comodidad, definamos $p_s = p_t = 0$.



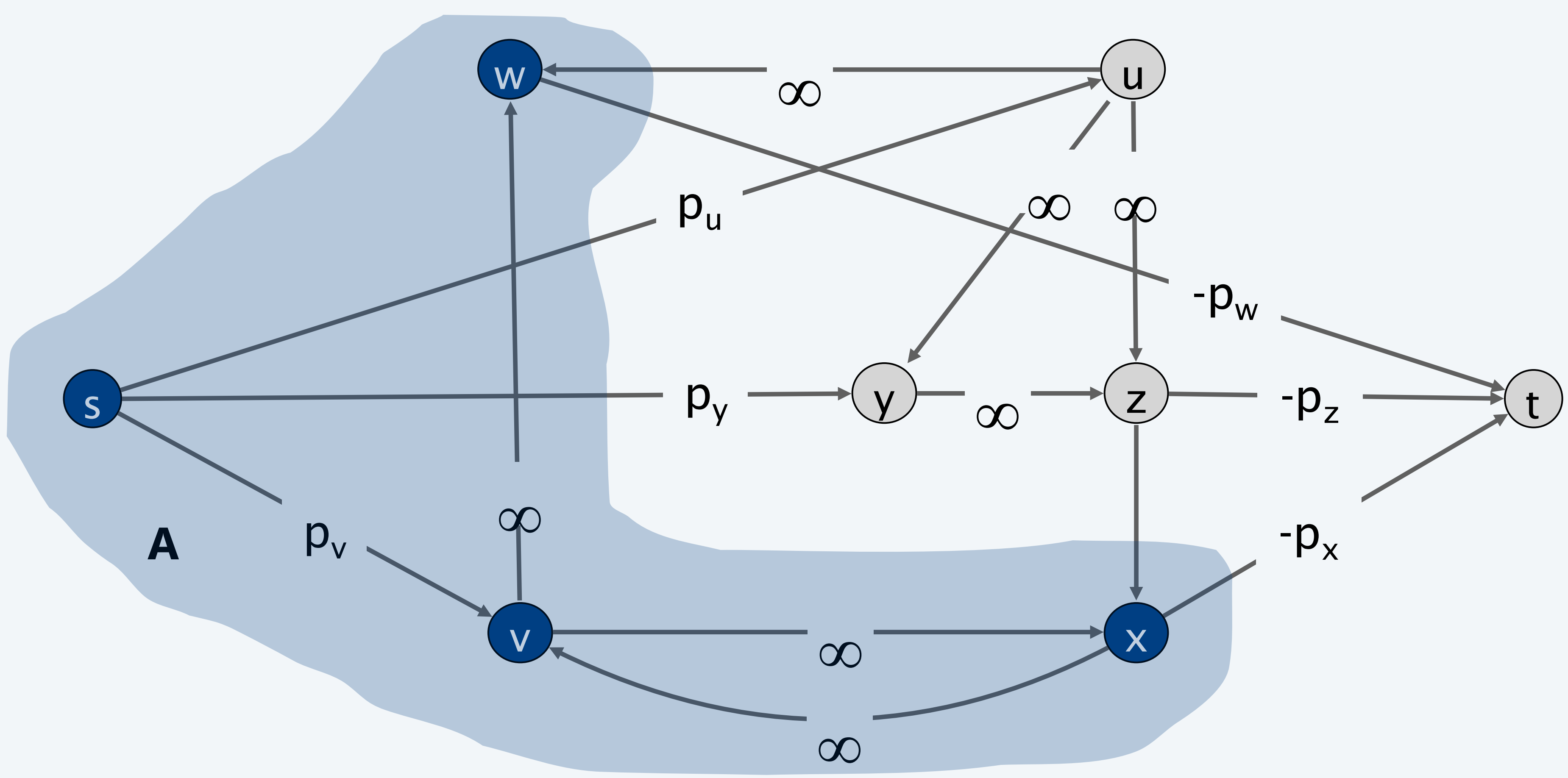
Selección de proyectos: formulación de minicortes

Afirmación. (A, B) es minicorte si A - $\{ s \}$ es un conjunto óptimo de proyectos.

- Los bordes de capacidad infinita garantizan que A - $\{ s \}$ sea factible.
- Ingresos máximos porque:

$$cap(A, B) = \sum_{v \in B:\, p_v > 0} p_v + \sum_{v \in A:\, p_v < 0} (-p_v)$$

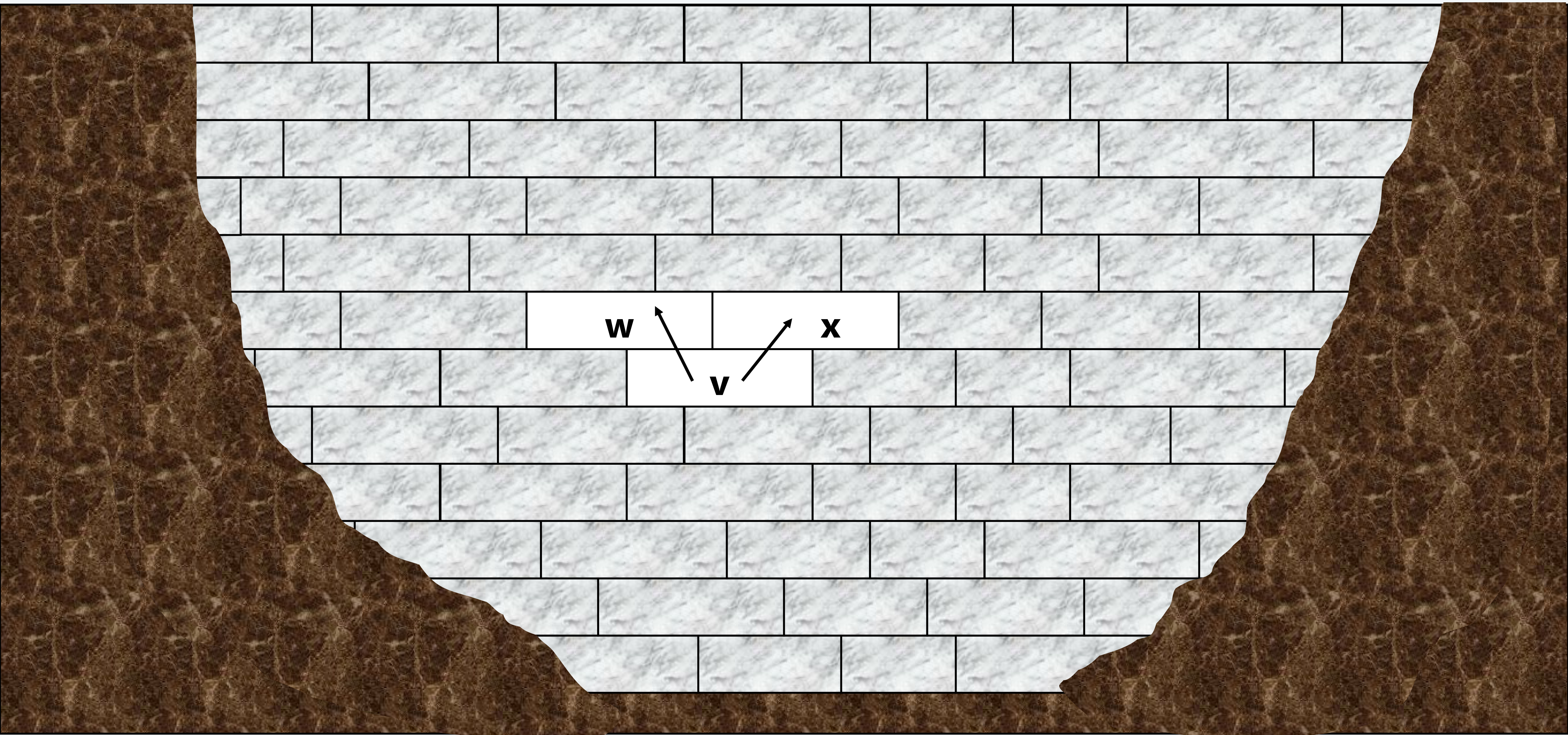
$$= \underbrace{\sum_{v:\, p_v > 0} p_v}_{\text{constant}} - \sum_{v \in A} p_v$$

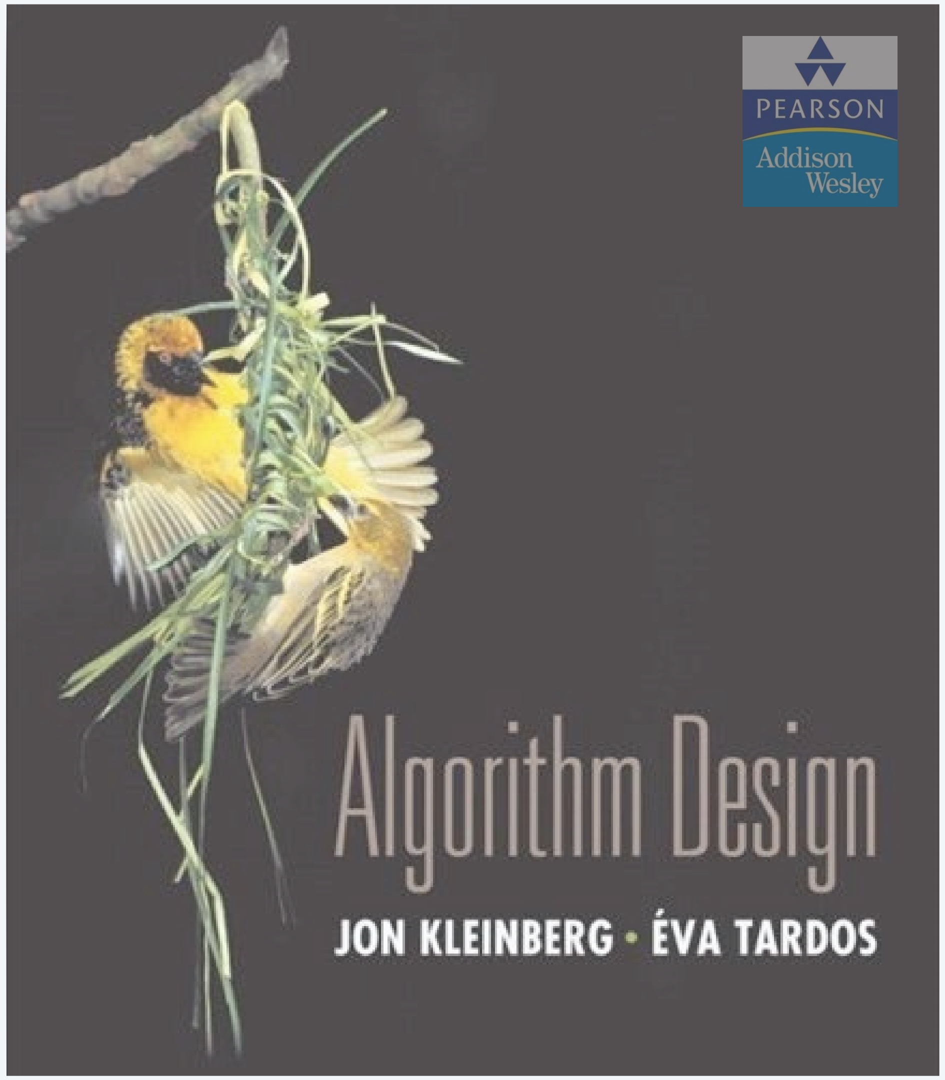


Explotación a cielo abierto

Minería a cielo abierto. (estudiada desde principios de los años 60)

- Se extraen bloques de tierra de la superficie para recuperar el mineral.
- Cada bloque v tiene un valor neto p_v = valor del mineral - coste de transformación.
- No se puede eliminar el bloque v antes que w o x.





ARTÍCULO 7.12

7. FLUJO DE RED II

- *emparejamiento bipartito*
- *caminos disjuntos*
- *extensiones a caudal máximo*
- *diseño de encuestas*
- *programación de vuelos*
- *segmentación de imágenes*
- *selección de proyectos*
- *eliminación del béisbol*

Eliminación del béisbol

TUESDAY, SEPTEMBER 10, 1996

San Francisco Chronicle

The Gate
Sports Online
▸ http://www.sfgate.com

SPORTING G

49ers, Young Get Big Brea

Quarterback m

By Gary Swan
Chronicle Staff Writer

The bye week has come at a perfect time for the 49ers and quarterback Steve Young. If they had a game next Sunday, there's a good chance Young would not play.

But the pulled groin muscle on his up-

Giants Officially Leave the NL West Race

By Nancy Gay
Chronicle Staff Writer

CARDINALS 6
GIANTS 2

With the smack of another National League West bat 500 miles away, the Giants' run at the division title ended last night, just as they were handing the visiting St. Louis Cardinals an even bigger lead in the NL Central.

In San Diego, Greg Vaughn's three-run homer in the eighth pushed the Padres over the Pirates and officially shoved the rest of the Giants' season into the background. On the heels of their tedious 6-2 loss before an announced crowd of 10,307 at Candlestick Park, the Giants fell 19½ games off the lead.

As it is, the worst the Padres (80-65) can finish is 80-82. The Giants have fallen to 59-83 with 20 games left; they cannot win 80 games. Coming off a miserable 2-8 mark on a three-city road trip that saw their road record drop to 27-47, the Giants were hoping to get off on the right foot in their longest homestand of the year (15 games, 14 days).

Financing in Place For Giants' New Stadium
SEE PAGE B1, MAIN NEWS

"Where we are, you're going to be eliminated sooner or later," Baker said quietly. "But it doesn't alter the fact that we've still got to play ball. You've still got to play hard, the fans come out to watch you play. You've got to play for the fact of loving to play, no matter where you are in the standings.

"You've got to play the role of spoiler, to not make it easier on

GIANTS: Page D5 Col. 3

Problema de eliminación del béisbol

Q. ¿Qué equipos tienen posibilidades de terminar la temporada con más victorias?

i	equipo		gana	pérdidas	para jugar	ATL	PHI	NYM	LUN
0		Atlanta	83	71	8	-	1	6	1
1		Filadelfia	80	79	3	1	-	0	2
2		Nueva York	78	78	6	6	0	-	0
3		Montreal	77	82	3	1	2	0	-

Montreal está matemáticamente eliminada.

- Montreal termina con ≤ 80 victorias.
- Atlanta ya tiene 83 victorias.

Observación. Ésta es la única razón de la que parecen ser conscientes los escritores deportivos: ¡las condiciones son suficientes, pero no necesarias!

Problema de eliminación del béisbol

Q. ¿Qué equipos tienen posibilidades de terminar la temporada con más victorias?

i	equipo		gana	pérdidas	para jugar	ATL	PHI	NYM	LUN
0		Atlanta	83	71	8	-	1	6	1
1		Filadelfia	80	79	3	1	-	0	2
2		Nueva York	78	78	6	6	0	-	0
3		Montreal	77	82	3	1	2	0	-

Filadelfia está matemáticamente eliminada.

- Filadelfia termina con ≤ 83 victorias.
- Nueva York o Atlanta terminarán con ≥ 84 victorias.

Observación. La respuesta depende no sólo del número de partidos ya ganados y que quedan por jugar, sino de contra quién se enfrentan.

Problema de eliminación del béisbol

Clasificación actual.

- Conjunto de equipos S.
- Equipo distinguido $z \in S$.
- El equipo x ya ha ganado w_x partidos.
- Los equipos x e y juegan entre sí r_{xy} veces adicionales.

Problema de eliminación en béisbol. Dada la clasificación actual, ¿hay algún resultado de los partidos restantes en el que el equipo z termine con más (o empatado a más) victorias?

SIAM Review
Vol. 8, No. 3, July, 1966

POSSIBLE WINNERS IN PARTIALLY COMPLETED TOURNAMENTS*

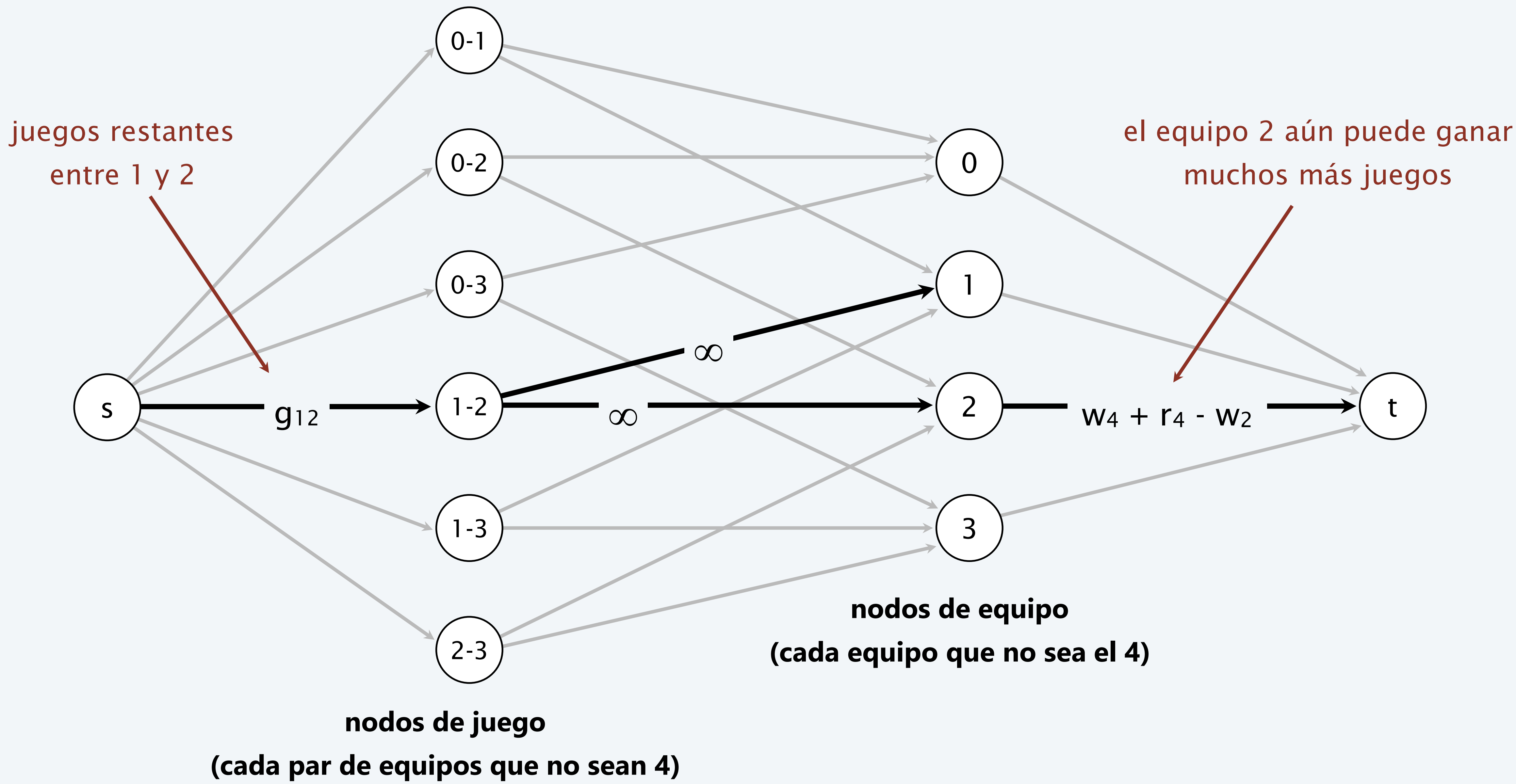
BENJAMIN L. SCHWARTZ†

1. Introduction. In this paper, we shall investigate certain questions in tournament scheduling. For definiteness, we shall use the terminology of baseball. We shall be concerned with the categorization of teams into three classes during the closing days of the season. A team may be definitely eliminated from pennant possibility; it may be in contention, or it may have clinched the championship. It will be our convention that a team that can possibly tie for the pennant is considered still in contention. In this paper necessary and sufficient conditions are developed to classify any team properly into the appropriate category.

Problema de eliminación del béisbol: formulación de flujo máximo

¿Puede el equipo 4 terminar con más victorias?

- Supongamos que el equipo 4 gana todos los partidos restantes $\Rightarrow w_4 + r_4$ victorias.
- Reparte los partidos restantes de forma que todos los equipos tengan $\leq w_4 + r_4$ victorias.

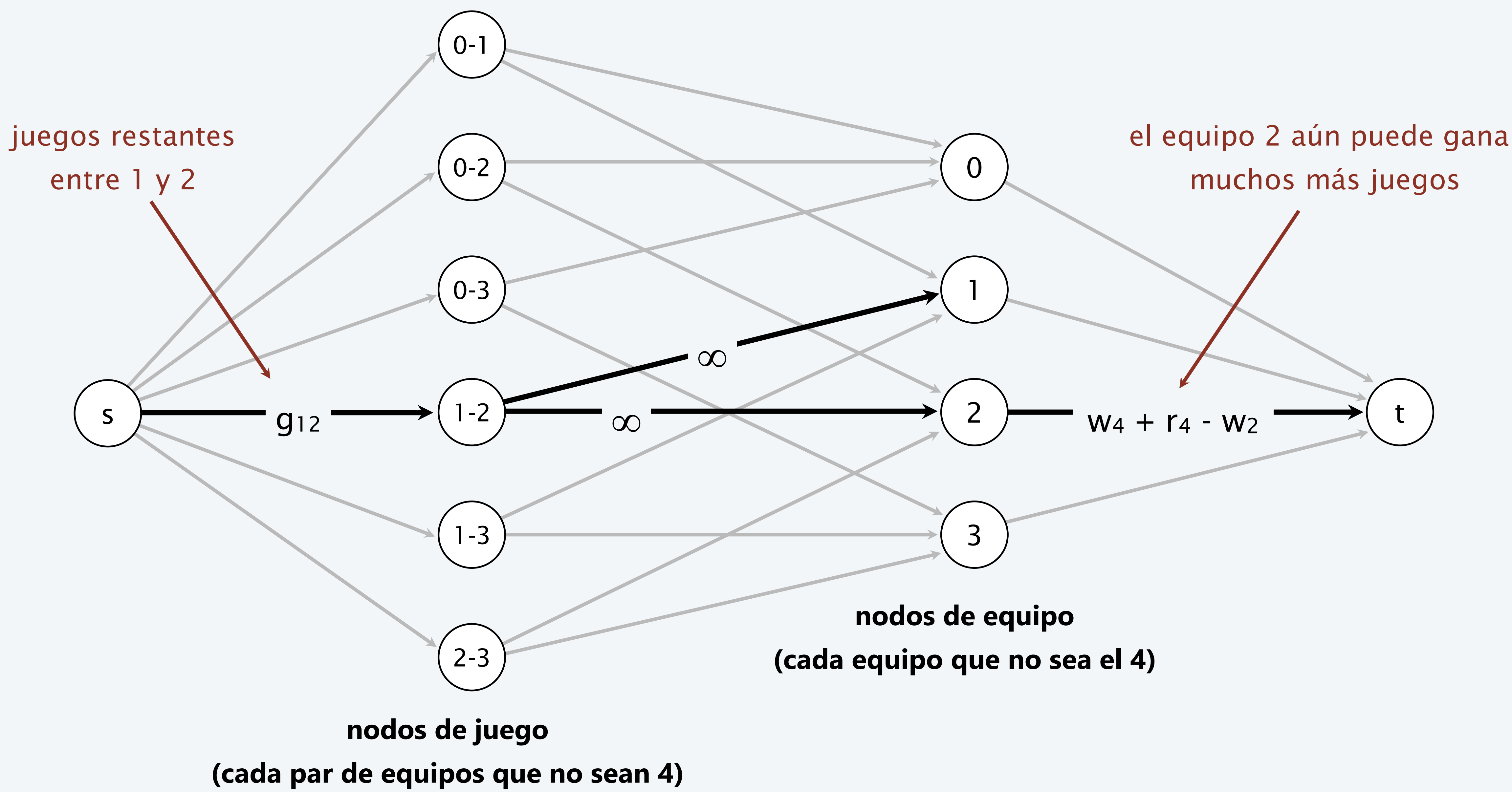


Problema de eliminación del béisbol: formulación de flujo máximo

Teorema. El equipo 4 no se elimina si el flujo máximo satura todas las aristas que salen de s.

Pf.

- Teorema de integralidad ⇒ cada partido restante entre x e y sumado al número de victorias del equipo x o del equipo y.
- La capacidad en los bordes (x, t) garantiza que ningún equipo gane demasiados partidos. ▪



Eliminación del béisbol: explicación para los redactores deportivos

Q. ¿Qué equipos tienen posibilidades de terminar la temporada con más victorias?

i	equipo	gana	pérdidas	para jugar	NYY	BAL	BOS	TOR	DET
0	Nueva York	75	59	28	-	3	8	7	3
1	Baltimore	71	63	28	3	-	2	7	4
2	Boston	69	66	27	8	2	-	0	0
3	Toronto	63	72	27	7	7	0	-	0
4	Detroit	49	86	27	3	4	0	0	-

AL Este (30 de agosto de 1996)

Detroit está matemáticamente eliminado.

- Detroit termina con ≤ 76 victorias.
- Ganancias para $R = \{ \text{NYY, BAL, BOS, TOR} \} = 278$.
- Partidos restantes entre $\{ \text{NYY, BAL, BOS, TOR} \} = 3 + 8 + 7 + 2 + 7 = 27$.
- El equipo medio en R gana $305/4 = 76{,}25$ partidos.

Certificado de eliminación.

$$T \subseteq S, \quad w(T) := \overbrace{\sum_{i \in T} w_i}^{\#\text{ wins}}, \quad g(T) := \overbrace{\sum_{\{x,y\} \subseteq T} g_{xy}}^{\#\text{ remaining games}},$$

Teorema. [Hoffman-Rivlin 1967] El equipo z se elimina si existe un subconjunto T* tal que

$$w_z + g_z < \frac{w(T^*) + g(T^*)}{|T^*|}$$

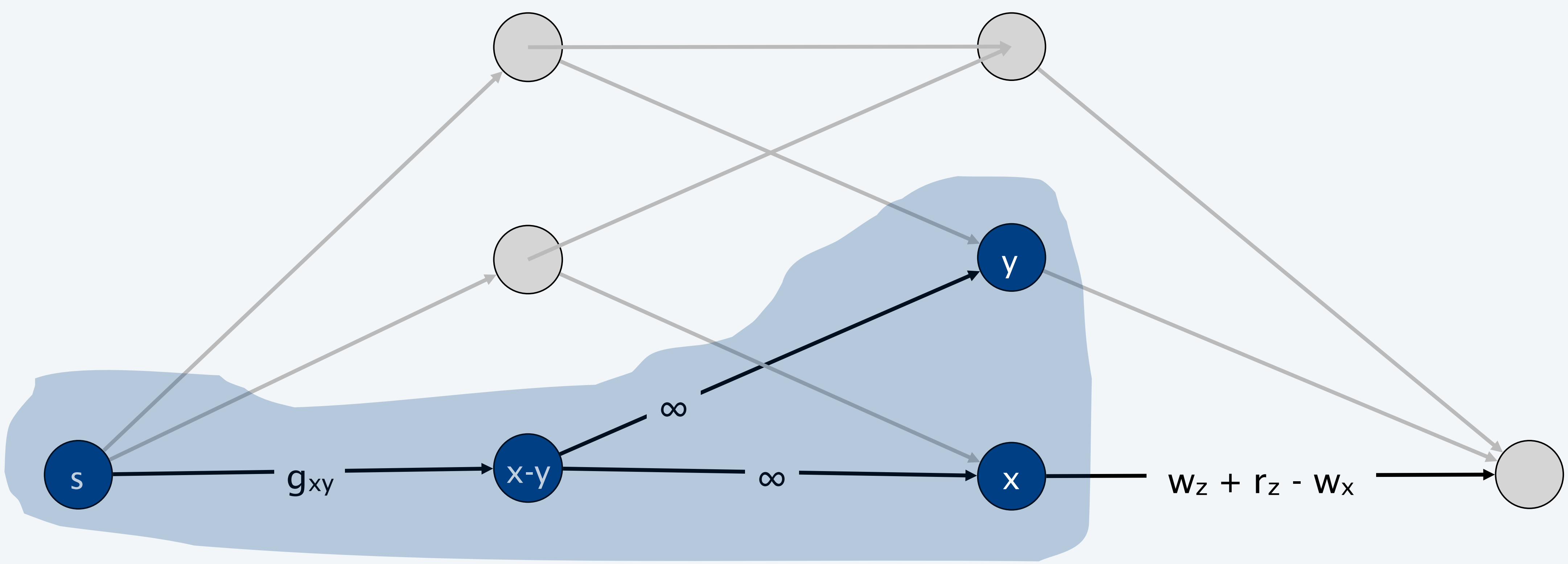
Pf. $\Leftarrow$

- Supongamos que existe $T^* \subseteq S$ tal que $w_z + g_z < \dfrac{w(T^*) + g(T^*)}{|T^*|}$
- Entonces, los equipos en T^* ganan al menos $(w(T^*) + g(T^*)) / |T^*|$ partidos de media.
- Esto supera el número máximo que puede ganar el equipo z. ▪

Eliminación del béisbol: explicación para los redactores deportivos

Pf. ⇒

- Utilice la formulación de flujo máximo y considere el corte mínimo (A, B).
- Sea $T^* =$ nodos del equipo en el lado fuente A del corte min.
- Obsérvese que el nodo de juego $x\text{-}y \in A$ si tanto $x \in T^*$ como $y \in T^*$.
  - los bordes de capacidad infinita garantizan que si $x\text{-}y \in A$, entonces tanto $x \in A$ como $y \in A$
  - si $x \in A$ e $y \in A$ pero $x\text{-}y \notin A$, entonces añadir $x\text{-}y$ a A disminuye la capacidad del corte en g_{xy}



Pf. $\Rightarrow$

- Utilice la formulación de flujo máximo y considere el corte mínimo (A, B).
- Sea $T^* =$ nodos del equipo en el lado fuente A del corte min.
- Obsérvese que el nodo de juego $x\text{-}y \in A$ si tanto $x \in T^*$ como $y \in T^*$.
- Dado que el equipo z es eliminado, por el teorema de max-flow min-cut,

$$
\begin{aligned}
g(S - \{z\}) \quad &> \quad cap(A, B) \\
&= \overbrace{g(S - \{z\}) - g(T^*)}^{\text{capacidad de las aristas de juego que salen de s}} + \overbrace{\sum_{x \in T^*} (w_z + g_z - w_x)}^{\text{capacidad de los bordes del equipo que entran en t}} \\
&= g(S - \{z\}) - g(T^*) \; - \; w(T^*) + |T^*|(w_z + g_z)
\end{aligned}
$$

- Reordenando términos: $w_z + g_z < \dfrac{w(T^*) + g(T^*)}{|T^*|}$ ▪