Conteo y Propiedades de la Probabilidad
Práctico 1

Ejercicio 1 : Usted se olvidó de la clave de su candado de tres dígitos (pueden ser repetidos) e intentar abrirlo probando todas las claves posibles. ¿Cuánto tiempo le llevará si cada prueba le insume tres segundos? ¿Cuánto tiempo le llevaría si el candado tuviera cuatro dígitos ?

Ejercicio 2 : Calcular la cantidad de matrículas que pueden hacerse en Uruguay[1] y calcular cuántas de ellas comienzan con P y terminan con 24.

Ejercicio 3 : De un grupo formado por tres ingenieros, cinco economistas y cuatro arquitectos deben seleccionarse cuatro para formar una comisión.

1. Calcular cuántas comisiones diferentes podrían formarse.
2. ¿cuántas de esas comisiones estarían integradas por un ingeniero, dos economistas y un arquitecto?
3. ¿En cuántas configuraciones hay por lo menos dos arquitectos?

Ejercicio 4 : En una fábrica los productos se codifican con tres letras distintas que indican tres operaciones que sufren cada uno de los productos y tres cifras distintas y en ese orden: primero las letras y después los números. Las letras utilizadas son A, B, C y D.

1. ¿Cuántos productos pueden codificarse?
2. ¿Cuántos códigos empiezan con A y terminan con 9?
3. ¿En cuántos los números 0 y 2 aparecen juntos y en ese orden?
4. ¿En cuántos los números 0 y 2 aparecen juntos?
5. ¿En cuántos productos aparecen dos números pares juntos y el otro es impar?

Ejercicio 5 : Se juega a un juego del tipo Cinco de Oro: hay que acertar cinco números, elegidos dentro de 36 posibilidades.

1. ¿Cuántas jugadas posibles hay?
2. Si se eligen cinco números a priori, ¿cuántas jugadas posibles hay que contengan exactamente uno de los números elegidos?
3. Si se eligen cinco números a priori, ¿cuántas jugadas posibles hay que contengan por lo menos dos de los números elegidos?

[1] Tres letras y cuatro dígitos.

Ejercicio 6 : * Usted va a la panadería a comprar una docena de bizcochos. En la panadería sólo quedan croissants, margaritas y galletas en cantidades suficientes.

1. ¿Cuántas elecciones distintas puede hacer?

2. Usted llega a la facultad con α croissants, β margaritas y γ galletas ($\alpha+\beta+\gamma=12$) y los reparte entre usted y 11 amigos. ¿de duántas formas los puede repartir? (Calcular en función de α, β y γ). ¿Cuánto deben valer α, β y γ para que dicha cantidad sea máxima? (Sugerencia: ver como varía dicha cantidad al variar en una unidad alguno de los parámetros)

Propiedades de la Probabilidad

Ejercicio 7 : Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad. Sean A, B y C sucesos. Expresar mediante operaciones con conjuntos los sucesos que corresponden a:

1. Ocurren A y B.
2. Ocurren los tres sucesos.
3. Ocurre A u ocurre B.
4. Ocurre por lo menos uno de los tres sucesos.
5. Ocurre A u ocurre B pero no los dos simultáneamente.
6. No ocurre B.
7. No ocurre ni A ni B.
8. No ocurre ninguno de los tres sucesos.
9. Ocurre A y no ocurre B.
10. Ocurre exactamente uno de los tres sucesos.
11. Ocurren por lo menos dos de los tres sucesos.

Ejercicio 8 : Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad. Demostrar que:

1. Si A y B son sucesos tales que $A \subset B$ entonces:

$$\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$$

   Sugerencia. Considerar que $B \setminus A = B \cap A^c$ y $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

   Deducir que $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$.

2. Si A y B son sucesos entonces $\mathsf{P}(A \cup B) \geq \max\{\mathsf{P}(A), \mathsf{P}(B)\}$ y $\mathsf{P}(A \cap B) \leq \min\{\mathsf{P}(A), \mathsf{P}(B)\}$

Ejercicio 9 : Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad. Se consideran dos sucesos A y B tales que $\mathsf{P}(A) = 1/3$ y $\mathsf{P}(B) = 1/2$. Determinar el valor de $\mathsf{P}(B \setminus A)$ en los siguientes casos:

1. A y B incompatibles[2]
2. $A \subset B$.
3. $\mathsf{P}(A \cap B) = 1/8$.

Ejercicio 10 : Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad. Se consideran los sucesos A y B con: $\mathsf{P}(A) = 3/8$, $\mathsf{P}(B) = 1/2$, $\mathsf{P}(A \cap B) = 1/4$. Calcular:

1. $\mathsf{P}(A^c)$ y $\mathsf{P}(B^c)$.
2. $\mathsf{P}(A \cup B)$.
3. $\mathsf{P}(A^c \cap B^c)$.
4. $\mathsf{P}(A^c \cap B)$ y $\mathsf{P}(A \cap B^c)$.

Ejercicio 11 : Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad. Demostrar que:

1. * Si A, B y C son sucesos entonces se cumple que:

$$\mathsf{P}(A \cup B \cup C) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(A \cap B) - \mathsf{P}(A \cap C) - \mathsf{P}(B \cap C) + \mathsf{P}(A \cap B \cap C)$$

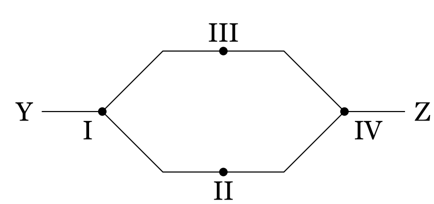
2. * Si $A_1, \ldots, A_n$ son sucesos probar que:

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1 \le i \le n} \mathsf{P}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathsf{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} \mathsf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

Ejercicio 12 : Un sistema de canalización de agua tiene cuatro compuertas, dispuestas como en la figura. Cada compuerta se abre y cierra al azar, dejando pasar agua (si está abierta) o impidiéndolo. Supongamos las probabilidades siguientes:

$\mathsf{P}(\text{I abierta}) = \mathsf{P}(\text{II abierta}) = \mathsf{P}(\text{III abierta}) = \mathsf{P}(\text{I cerrada, III abierta}) = 0.3$,
$\mathsf{P}(\text{IV abierta}) = 0.6$,
$\mathsf{P}(\text{I cerrada, II abierta}) = \mathsf{P}(\text{I abierta, IV cerrada}) = 0.11$,
$\mathsf{P}(\text{II abierta, IV abierta}) = \mathsf{P}(\text{III abierta, IV cerrada}) = 0.2$,

$\mathsf{P}(\text{II abierta, III abierta}) = 0.00$,
$\mathsf{P}(\text{I o II o IV abierta}) = 0.72$,
$\mathsf{P}(\text{I o III o IV abierta}) = 0.91$.



Calcular la probabilidad de que un torrente de agua lanzado en el punto Y llegue a Z. Se sugiere utilizar el ejercicio anterior.

[2] $A \cap B = \emptyset$.

Ejercicio 13 : Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad.

1. Mostrar que si A y B son sucesos entonces:

$$\mathsf{P}(A \cup B) \leq \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

2. Deducir que si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son sucesos entonces:

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{m} \mathsf{P}(A_n)$$

3. * Demostrar que si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una colección de sucesos se cumplen:

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N} \mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \qquad \text{y que} \qquad \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N} \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)$$

   Sugerencia: aplicar el teorema de continuidad de la probabilidad.

4. Deducir que si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una colección de sucesos entonces:

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n)$$

5. Deducir por último que si $\mathsf{P}(A_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.