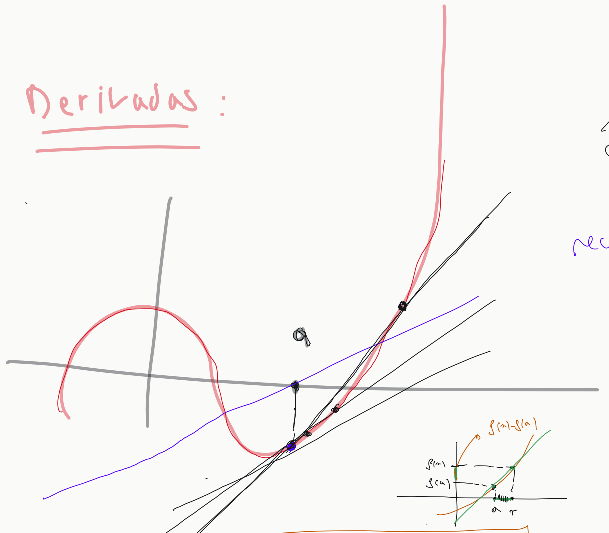
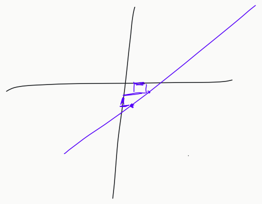
Derivadas:

$y = \underline{a}x + \underline{b}$

↳ Pendiente

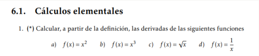
recta tangente al gráfico en $(a, f(a))$





$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)}$$

Práctico 6: Ejercicio 1, Sección 1



6.1. Cálculos elementales

1. (*) Calcular, a partir de la definición, las derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$

a) Lo vimos en el teórico.

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = (x^2)' = 2x$

b) $f(x) = x^3$. Vamos a calcular la derivada en un punto cualquiera $a \in \mathbb{R}$. $(¿f'(a)?)$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)}{\cancel{x-a}}$$

$$= \lim_{x\to a} x^2+ax+a^2$$

$$= a^2 + a\cdot a + a^2$$

$$= 3a^2.$$

	1	0	0	$-a^3$
a		a	a^2	a^3
	1	a	a^2	0

$\Rightarrow x^3-a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$

$\Rightarrow \boxed{f'(a) = 3a^2, \forall a \in \mathbb{R}}$

$(x^3)' = 3x^2$ ✓

d) $$\lim_{x\to a} \frac{1/x - 1/a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\overset{-(x-a)}{(a-x)}}{xa\cancel{(x-a)}} = \lim_{x\to a} \frac{-1}{xa} = \frac{-1}{a^2}$$

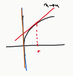
$\Rightarrow f'(a) = -1/a^2$

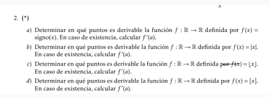
$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\overbrace{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}^{\sqrt{x}^2-\sqrt{a}^2 = x-a}}{x-a \quad \sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\cancel{x-a}}{\cancel{x-a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} \overset{\text{Si } a\neq 0}{=} \frac{1}{2\sqrt{a}}$$





2. (*)

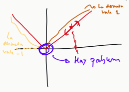
a) Determinar en qué puntos es derivable la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) =$ signo(x). En caso de existencia, calcular $f'(a)$.

b) Determinar en qué puntos es derivable la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. En caso de existencia, calcular $f'(a)$.

c) Determinar en qué puntos es derivable la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida ~~por f(x)~~ $= \lfloor x \rfloor$. En caso de existencia, calcular $f'(a)$.

d) Determinar en qué puntos es derivable la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]$. En caso de existencia, calcular $f'(a)$.

b) Determinar en que puntos es derivable $|x|$



Vamos a ver primero que f es derivable en los negativos, y la derivada vale -1

~~[illegible]~~ a 0

Sea $a \in (-\infty, 0)$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\overset{|x|=-x}{|x|} - \overset{|a|=-a}{|a|}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{-x-(-a)}{x-a}$$

$x \to a$ y $a<0$

$$= \lim_{x\to a} \frac{-x+a}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{-\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} = -1$$

$\Rightarrow$ Si a es negativo, $f'(a) = -1$

Análogamente, vemos que $|x|$ es derivable en los reales positivos, y la derivada vale 1.

Veamos que $|x|$ no es derivable en 0:

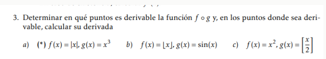
Calculamos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

Vemos los límites laterales:

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$

$\Rightarrow$ Como los límites laterales no coinciden, no existe el límite, y por lo tanto no es derivable en 0.



3. Determinar en qué puntos es derivable la función $f \circ g$ y, en los puntos donde sea derivable, calcular su derivada

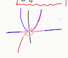
a) (*) $f(x) = |x|, g(x) = x^3$ b) $f(x) = \lfloor x \rfloor, g(x) = \sin(x)$ c) $f(x) = x^2, g(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$

a) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^3$

$f\circ g(x) = f(g(x)) = f(x^3) = |x^3|$

$= |x|^3$

$\Rightarrow \boxed{f\circ g(x) = |x|^3}$



Veamos que la composición es derivable en el origen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(g(x))-f(g(0))}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^3-|0|^3}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|^3}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|^3}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 \checkmark$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|^3}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)^3}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^3}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} -x^2 = 0 \checkmark$$

$\Rightarrow f\circ g$ es derivable en 0, y su derivada vale 0.

Prop: si $\lambda \in \mathbb{R}$, y f es derivable en $a \in \mathbb{R}$, entonces λf es derivable en a, y $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

$(fg)' = f'g + fg'$ (Regla de Leibnitz)

$(x^2)' = (x\cdot x)' = \ldots$

$(x^n)' = n x^{n-1}$

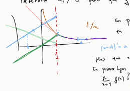
$(f+g)' = f'+g'$

Ejercicio 9:

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x \leq 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determinar a, y b para que f sea derivable.



En primer lugar, f es derivable en todo punto distinto de 1.

$(ax+b)' = a$

Hay que estudiar que es lo que pasa en 1.

En primer lugar, necesitamos que f sea cont. en 1:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \overset{?}{=} \boxed{f(1) = a+b}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax+b = a+b$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 1/x = 1$$

$\Rightarrow$ Obtenemos una primera condición: $\boxed{a+b = 1}$

Necesitamos además que f sea derivable en 1

Queremos que exista:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

- $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1/x - \overset{f(1)=a+b=1}{1}}{x-1} = \frac{-1}{1^2}$

La derivada de $1/x$ en 1 $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$

$= -1$

- $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{ax+b-\overset{f(1)=a+b}{(a+b)}}{x-1} = a$

$$\lim_{x\to 1} \frac{ax+b-(a\cdot 1+b)}{x-1} = a$$

$\Rightarrow$ Obtenemos $\boxed{a = -1}$ ✓

Teníamos $a+b = 1$

$-1+b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 2}$ ✓