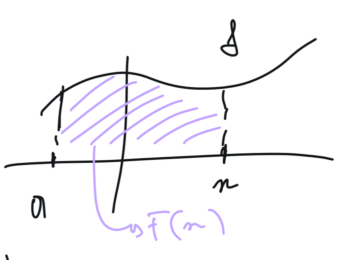
Teorema fundamental del cálculo:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



Si f es continua en x, entonces F es derivable en x, y $F'(x) = f(x)$

$$\left(\int_0^x f(t)\,dt \right)' = f(x)$$

Def: decimos que F es primitiva de f si

$F'(x) = f(x) \quad \forall x.$

Ej: x^2 es primitiva de $2x$

$x^2 + 4$ es primitiva de $2x$

Regla de Barrow: Si F es primitiva de f, entonces $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Ej: $\int_1^2 3t^2\,dt = 2^3 - 1^3 =: (x^3)\Big|_1^2$

$= 8 - 1 = 7$

$\Rightarrow \int_1^3 3t^2\,dt = 7$

Ejercicio 1: Sin calcular la integral, derivar las siguientes funciones

a) $f(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt$

b) $f(x) = \int_x^3 \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt$

d) $f(x) = \int_{x^2}^2 \frac{t^7}{1+t^4}\,dt$ f) $f(x) = \int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{t^7}{1+t^4}\,dt$

a) $f(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt$

TFC.

$f'(x) = \left(\int_1^x \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt \right) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

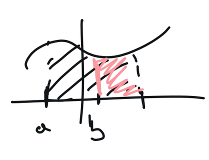
$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

b) $f(x) = \int_x^3 \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt = -\int_3^x \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt$

$\Rightarrow f'(x) = \left(-\int_3^x \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt \right)'$

$= -\left(\int_3^x \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt \right)' = -\left(\sqrt{x^2 - x + 1} \right)$

$= -\sqrt{x^2 - x + 1}$



d) $f(x) = \int_{x^2}^2 \frac{t^7}{1+t^4}\,dt = -\int_2^{x^2} \frac{t^7}{1+t^4}\,dt$

$\underbrace{F(x)} = \int_2^x \frac{t^7}{1+t^4}\,dt$ ← Sabemos derivarla!! TFC $\Rightarrow F'(x) = \frac{x^7}{1+x^4}$

$f(x) = -\int_2^{x^2} \frac{t^7}{1+t^4}\,dt = -F(x^2)$

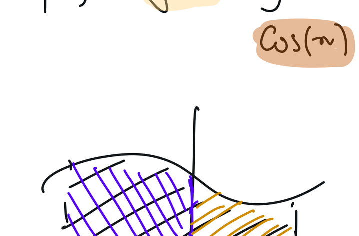
$\Rightarrow f'(x) = (-F(x^2))' = -(F(x^2))'$

Regla de la cadena → $= -F'(x^2)\,(x^2)'$

$= -\left(\frac{(x^2)^7}{1+(x^2)^4} \right) \cdot 2x$

$= -\frac{x^{14}}{1+x^8} \cdot 2x = \frac{-2x^{15}}{1+x^8}$

f) $f(x) = \int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{t^7}{1+t^4}\,dt = \underbrace{\int_0^{\sin(x)} \frac{t^7}{1+t^4}\,dt} + \underbrace{\int_{\cos(x)}^0 \frac{t^7}{1+t^4}\,dt}$



→ $= \underbrace{\int_0^{\sin(x)} \frac{t^7}{1+t^4}\,dt} - \underbrace{\int_0^{\cos(x)} \frac{t^7}{1+t^4}\,dt}$

$= F(\sin(x)) - F(\cos(x))$

$\underbrace{F(x) = \int_0^x \frac{t^7}{1+t^4}\,dt}$

$\Downarrow$ TFC

$F'(x) = \frac{x^7}{1+x^4}$

$\Rightarrow f'(x) = \left(F(\sin(x)) - F(\cos(x)) \right)'$

$= \left(F(\sin(x)) \right)' - \left(F(\cos(x)) \right)'$

Regla de la cadena → $= \underbrace{F'(\sin(x))}\,(\sin(x))' - F'(\cos(x))\,(\cos(x))'$

$= \frac{\sin^7(x)}{1+\sin^4(x)} \cdot \cos(x) - \frac{\cos^7(x)}{1+\cos^4(x)}\,(-\sin(x))$

$f'(x) = \frac{\sin^7(x)\cos(x)}{1+\sin^4(x)} + \frac{\cos^7(x)\sin(x)}{1+\cos^4(x)}$

Prop:

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x)$$

Ej 2: $\int_0^1 \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt = \frac{1}{8}\left(4 + \log(27)\right)$, calcular $f'(1)$ para las siguientes funciones.

2. (*) Sabiendo que la integral $\int_0^1 \sqrt{t^2-t+1} = \frac{1}{8}(4+\log(27))$, calcular $f'(1)$ para las siguientes funciones

a) $f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^2-t+1} + x\,dt$ b) $f(x) = \int_0^{2x-1} \sqrt{t^2-t+1} + x^2\,dt$

c) $f(x) = \int_x^0 x^2\sqrt{t^2-t+1}\,dt$ d) $f(x) = \int_{x^2}^0 x\sqrt{t^2-t+1}\,dt$

e) $f(x) = \int_{\sin(\pi x)}^x e^x\sqrt{t^2-t+1}\,dt$ f) $f(x) = \int_{\log(x)}^{x^2} e^x\sqrt{t^2-t+1}\,dt$

$f(x) = \int_x^0 x^2\sqrt{t^2 - t + 1}\,dt = x^2 \underbrace{\int_x^0 \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt}$

Lo derivamos como hicimos recién.

$f'(x) = \left(x^2 \int_x^0 \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt \right)'$

$= \underbrace{(x^2)'}_{2x} \underbrace{\int_x^0 \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt} + x^2 \left(\int_x^0 \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt \right)'$

Regla del producto.

$= 2x \int_x^0 \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt + x^2 \left(-\sqrt{x^2 - x + 1} \right)$

$= -2x \int_0^x \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt - x^2\sqrt{x^2 - x + 1}$

$\Rightarrow f'(1) = -2(1) \underbrace{\int_0^1 \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt} - (1)^2\sqrt{1^2 - 1 + 1}$

$= \ldots \quad \frac{1}{8}\left(4 + \log(27)\right) - \ldots$

4. (*) Determinar (si existen) una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un número real $c \in \mathbb{R}$ tales que

a) $\int_0^x f(t)dt = c - e^{-x^2}$ b) $\int_x^1 f(t)\,dt = \cos^2(x) + c$ c) $\int_x^1 f(t)\,dt = \sqrt{x^4+1} + c$

d) $\int_c^x f(t)\,dt = 2 + x^2$ e) $\int_c^x f(t)\,dt = (x-1)^4$ f) $\int_c^x f(t)\,dt = \sin^2(x) + 1$

a) $\int_0^x f(t)\,dt = c - e^{-x^2}$ ← Buscamos f y c

$\Rightarrow \left(\int_0^x f(t)\,dt \right)' = \left(c - e^{-x^2} \right)'$

$f(x) = -(-2x)\,e^{-x^2}$

$= 2x\,e^{-x^2}$

$c - e^{-x^2}$ es primitiva de $2x\,e^{-x^2}$

Si existe f, tiene que ser $f(x) = 2x\,e^{-x^2}$.

Regla de Barrow

$c - e^{-x^2} = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \underbrace{2t\,e^{-t^2}}\,dt = \left(c - e^{-x^2} \right)\Big|_0^x$

Busco F / $F' = f$

(Barrow: Si $\underbrace{F'(x) = f(x)}$ $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$)

$= c - e^{-x^2} - \left(c - e^{-0^2} \right)$

$= \cancel{c} - e^{-x^2} - \cancel{c} + 1$

$\Rightarrow c - \cancel{e^{-x^2}} = -\cancel{e^{-x^2}} + 1$

$\Rightarrow c = 1$ ✓

d) $\int_c^x f(t)\,dt = 2 + x^2$

$\underbrace{\left(\int_c^x f(t)\,dt \right)'} = \underbrace{(2 + x^2)'}$

$f(x) = 2x$ ✓

$\Rightarrow 2 + x^2 = \int_c^x f(t)\,dt = \int_c^x 2t\,dt = (2 + x^2)\Big|_c^x$

$= 2 + x^2 - (2 + c^2) = \cancel{2} + x^2 - \cancel{2} - c^2$

$\Rightarrow 2 + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} - c^2$

$2 = -c^2 \rightarrow$ no tiene solución

$\Rightarrow \nexists\ c$ que verifique lo que dice la letra.