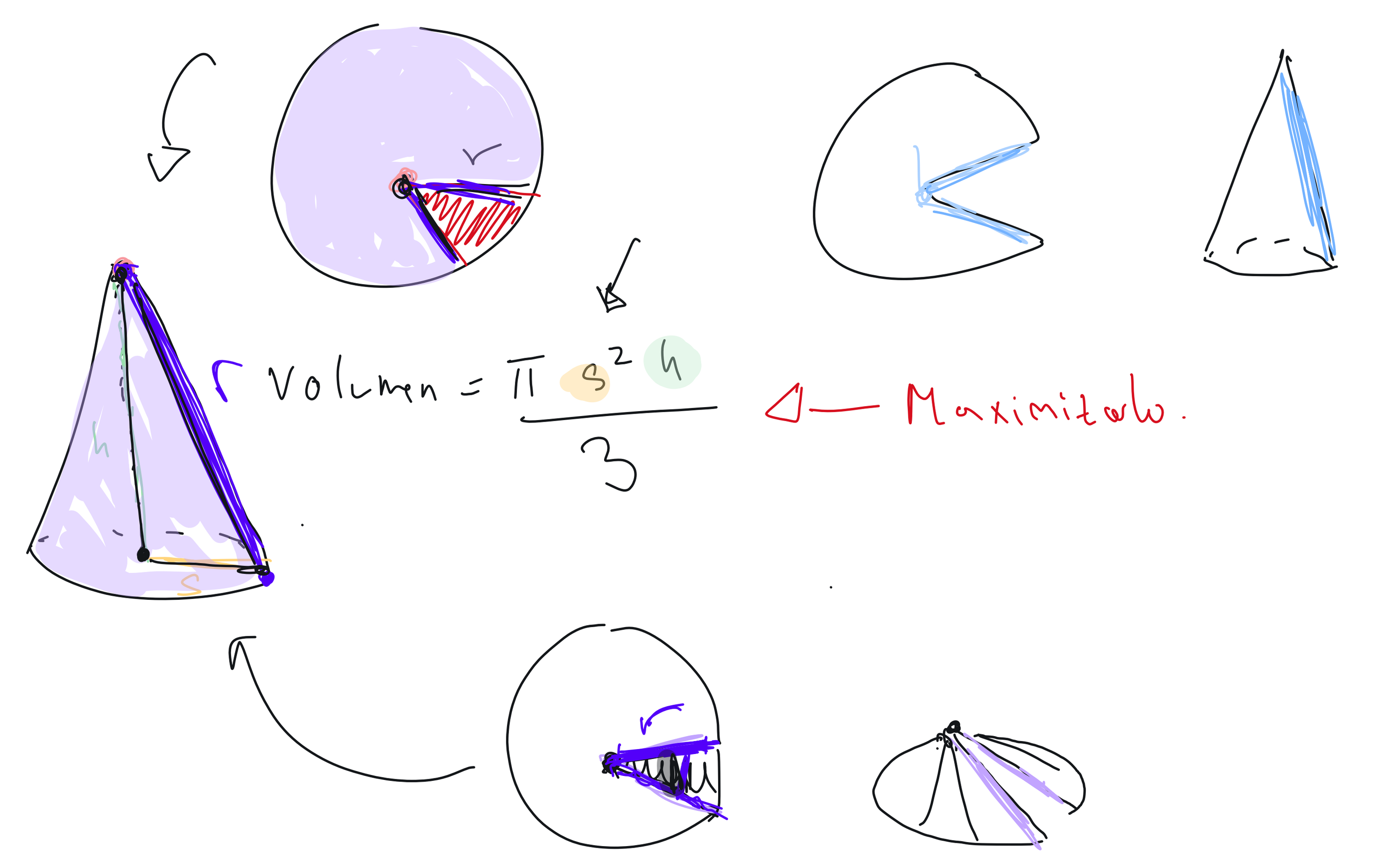
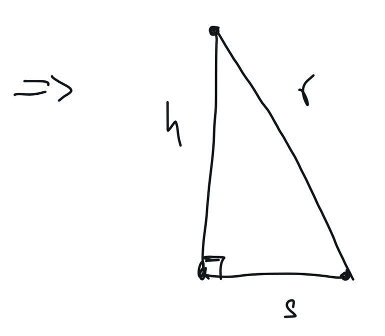
4. (*) Calcular el cono de mayor volumen que se puede construir a partir de un círculo de radio r (Recordar que el volumen de un cono con altura h y base un círculo de radio s es $\pi s^2 h/3$). *Sugerencia: recordar cómo se hacen los gorros de cumpleaños:*



$$\text{Volumen} = \frac{\pi s^2 h}{3}$$ ◁— Maximizarlo.



$\Rightarrow$ Pitágoras $r^2 = h^2 + s^2 \Rightarrow \boxed{s^2 = r^2 - h^2}$

$$\Rightarrow \text{Volumen} = \frac{\pi s^2}{3} h = \underbrace{\frac{\pi (r^2-h^2)h}{3}}_{\text{función que depende de } h}$$

$$\Rightarrow f(h) = \frac{\pi (r^2-h^2)h}{3}$$ ◁— Queremos hallarle el máximo.

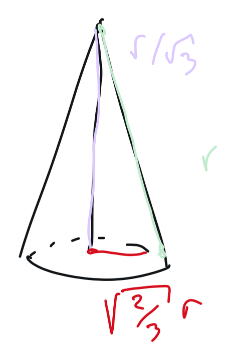
$$= \frac{1}{3}\left(\pi r^2 h - \pi h^3\right)$$

$$\Rightarrow f'(h) = \frac{1}{3}\left(\pi r^2 - 3\pi h^2\right)$$

$$f'(h) = 0 \longleftrightarrow \pi r^2 - 3\pi h^2 = 0$$
$$3\cancel{\pi} h^2 = \cancel{\pi} r^2$$
$$h^2 = \frac{r^2}{3}$$
$$h = \pm\sqrt{\frac{r^2}{3}} = \pm\frac{r}{\sqrt{3}}$$

Como h es la altura del cono, tomamos $\underbrace{h = \frac{r}{\sqrt{3}}}_{\text{Lo Maximiza la función}}$

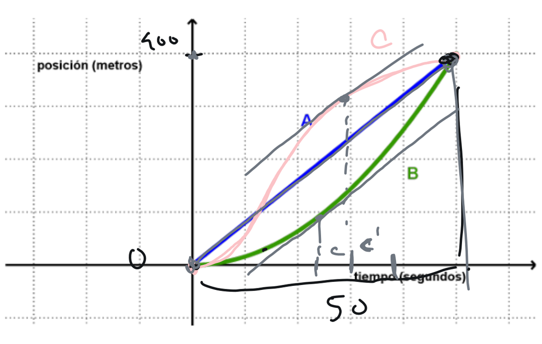
$\Rightarrow$ El volumen va a ser $f\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)$



$$S = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{3}}$$
$$= \sqrt{\frac{2r^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r$$

6.9. Aplicaciones

1. (*) El siguiente es el gráfico que muestra la posición en función del tiempo de dos corredores que finalizaron 400 metros en 50 segundos.



$\exists\, c \in (0,50) \,/\, f'(c) = \frac{400-0}{50} = 8$

$\exists\, c' \in (0,50) \,/\, g'(c) = 8$

a) ¿Fueron siempre a la misma velocidad? En caso de que no sea así ¿Cual tuvo mayor velocidad máxima? B

b) Determinar que corredor iba ganando en cada momento

c) Si un tercer corredor tardo también 50 segundos. Pruebe que en algún momento fue a la misma velocidad que el corredor B

$f(t)$ es la posición de B en función del tiempo.

$g(t)$ es la posición de C en función del tiempo.

$f'(t)$ es la velocidad instantanea de B

$g'(t)$ es la velocidad instantanea de C.

Quiero hallar $t_0 \in [0,50] \,/\, f'(t_0) = g'(t_0)$.

$$\longleftrightarrow \underbrace{f'(t_0) - g'(t_0)}_{(f-g)'(t_0) = 0} = 0$$

$(f-g)(0) = f(0) - g(0) = 0$

$(f-g)(50) = f(50) - g(50) = 400 - 400 = 0$

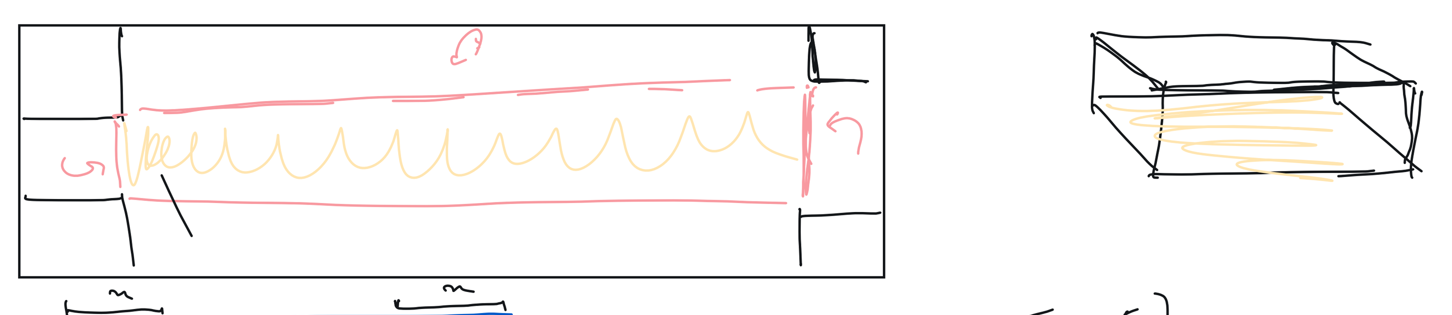
$\xRightarrow{\text{Teo Rolle}} \exists\, t_0 \in (0,50) \,/\, (f-g)'(t_0) = 0$

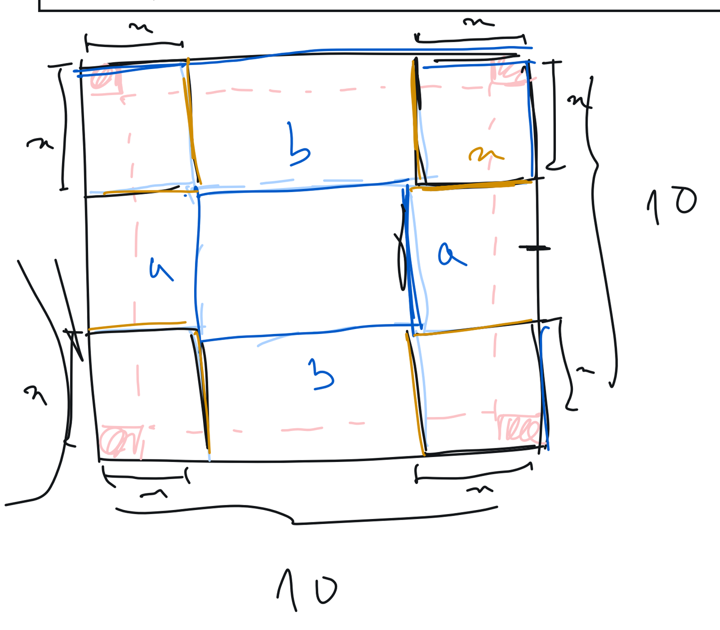
$\Rightarrow f'(t_0) = g'(t_0)$ ← Tiene la misma velocidad instantanea en t_0.

□

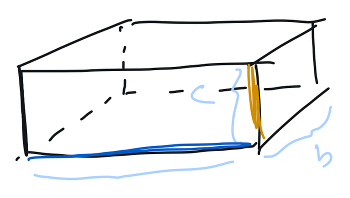
14. (*) Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo, si el rectángulo tiene como lados a) 10 y 10 cm. b) 12 y 18 cm.

c) Dar un procedimiento similar para contruir una caja con tapa. Maximizar el volumen en caso de que el rectángulo mida 12 y 18 cm.





$x \in [0,5]$



Vol $= abc$

$a = 10 - 2x$

$b = 10 - 2x$

$c = x$

$$\Rightarrow \text{Vol} = (10-2x)(10-2x)x$$
$$= (10-2x)^2 x$$
$$f(x) = (100 - 40x + 4x^2)x$$
$$= 100x - 40x^2 + 4x^3$$

$$\Rightarrow f'(x) = 100 - 80x + 12x^2$$

Luego $f'(x) = 0 \longleftrightarrow 100 - 80x + 12x^2 = 0$

$$\longleftrightarrow 25 - 20x + 3x^2 = 0$$

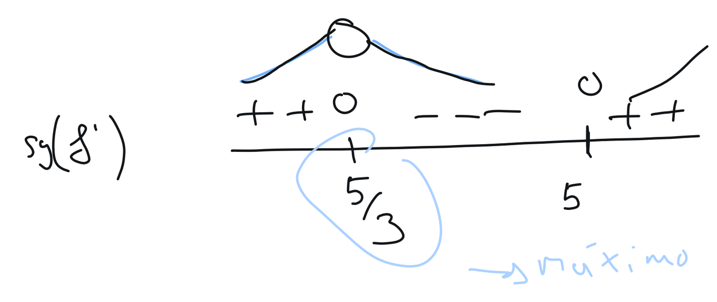
$$\longleftrightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4(3)25}}{6}$$

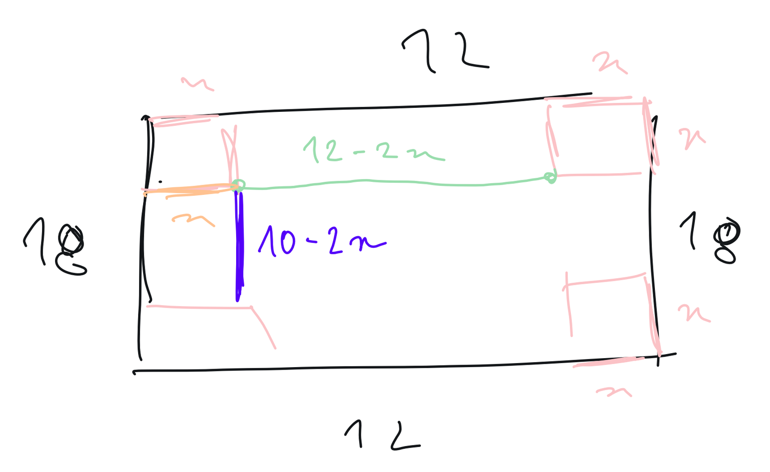
$$= \frac{20 \pm \sqrt{400-300}}{6}$$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6}$$

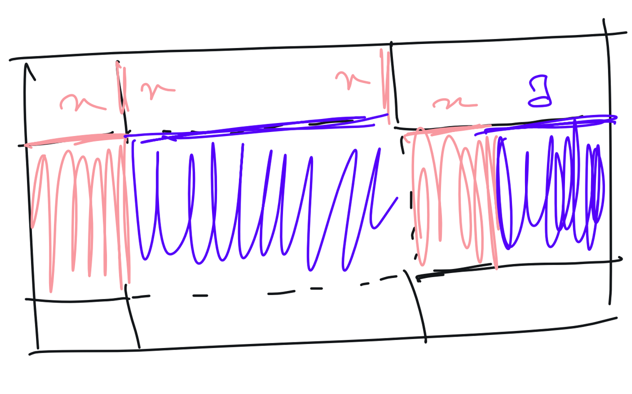
$\frac{20+10}{6} = 5$

$\frac{20-10}{6} = 5/3$





$$\text{Vol} = (12-2x)(18-2x)x$$



← Parte c