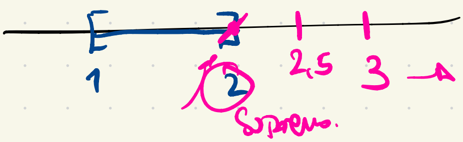
Axioma de Completitud: Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y tiene cota superior, entonces tiene supremo.

Cota superior: $c \in \mathbb{R}$ es cota superior de A, si $\forall a \in A$ se tiene que $c \geq a$.

Supremo: "la menor de las cotas superiores de A":
El $\sup(A) \in \mathbb{R}$ verifica que
- $\forall$ $c \in \mathbb{R}$ cota superior de A, se tiene que $\sup(A) \leq c$
- Además, $\sup(A)$ es una cota superior de A.

$A = [1,2]$

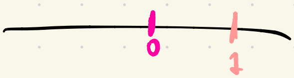


$\to$ Cota superior de $[1,2]$

Decimos que $\sup(A)$ es máximo si $\sup(A) \in A$

Sección 3:

Ej: $A = \{0\}$.



- A está acotado superiormente: 1 es cota superior.
- Como A está acot. sup., el axioma de completitud nos dice que tiene supremo.

Afirmación: $\sup(A) = 0$.

Para probar que $\sup(A)=0$, tenemos que ver 2 cosas

1) 0 es cota superior de A

2) $\forall\, c\in\mathbb{R}$ cota superior de A, tenemos que ver que $0\leq c$.

→ "0 es la menor de las cotas superiores".

1) $\forall\, a\in A$, tiene que ocurrir que $a\leq 0$.

Sea $a\in A$. Pero $A=\{0\} \Rightarrow a=0$.

Luego, $a=0\leq 0$
$\Rightarrow a\leq 0$, $\forall a\in A$.

$\Rightarrow$ $\boxed{0 \text{ es cota superior de } A}$ ✓ (1)

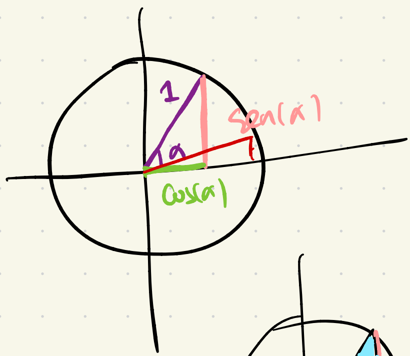
2) Sea $c\in\mathbb{R}$ una cota superior de A.

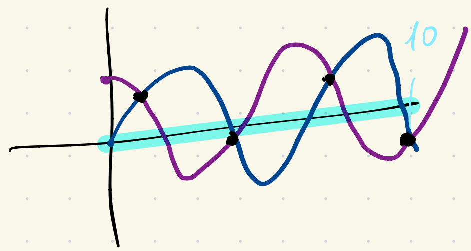
Como c es cota superior de A, y $0\in A$, tenemos que $\boxed{c\geq 0.}$ ✓ (2)

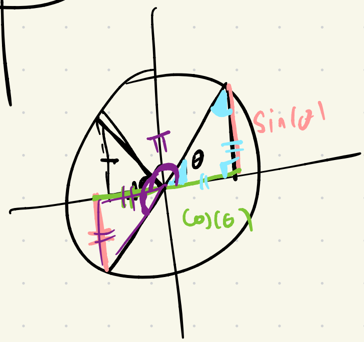
$(1)+(2) \Rightarrow \underline{\underline{\sup(A)=0.}}$

Análogamente, podemos probar que $\inf(A)=0$.

Ejercicio 2: b) $\{\theta \in [0,10] : \cos(\theta) = \sin(\theta)\}$







θ "=" $45°$

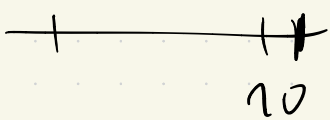
$\boxed{\theta = \pi/4}$

$\boxed{\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}}$ ←

Los θ que nos sirven son: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi$,

$\frac{\pi}{4} + \pi$, $\cancel{\frac{\pi}{4} + 3\pi}$

más grande 10.



$\{\theta \in [0,10] : \sin(\theta) = \cos(\theta)\}$

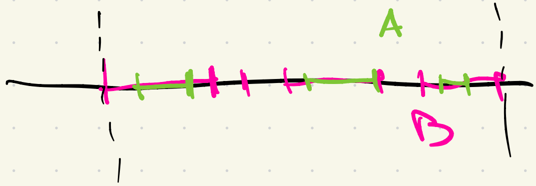
$= \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi, \frac{\pi}{4} + 2\pi \right\}$

↳ supremo = máximo

↳ ínfimo = mínimo

Ejercicio 3: $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos.

a) 1) Si $A \subseteq B$ y B es acotado, demostrar que $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$



Como B acotado, tiene ínfimo y supremo.

Como $A \subseteq B$, A también acotado, y por lo tanto también tiene supremo e ínfimo.

Veamos que $\inf(B) \leq \inf(A)$.

Para probar esto, podemos ver que $\inf(B)$ es cota inferior de A.

Luego, $\inf(B) \leq \inf(A)$.

Sea $a \in A$. Como $A \subseteq B$, entonces $a \in B$.

Por definición de $\inf(B)$, se tiene que $\inf(B) \leq a$.

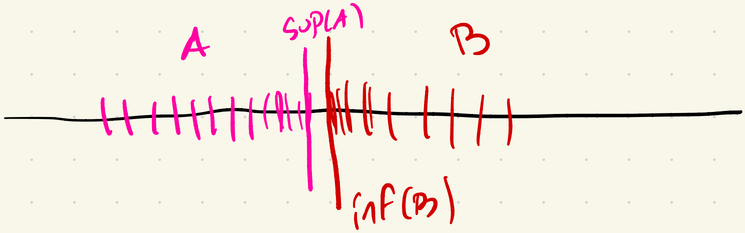
Como este argumento funciona $\forall a \in A$, tenemos que $\inf(B)$ es cota inferior de A.

Luego, $\boxed{\inf(B) \leq \inf(A).}$

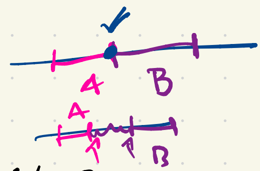
Siempre vale que $\boxed{\inf(A) \leq \sup(A)}$.

Falta probar que $\sup(A) \leq \sup(B)$. Esto se demuestra análogamente.

b) 1) Si $a \leq b$ $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, demostrar que $\sup(A) \leq \inf(B)$.



Si $b \in B$, $\forall a \in A$, se tiene que $a \leq b$.



$\Rightarrow$ b es cota superior de A.

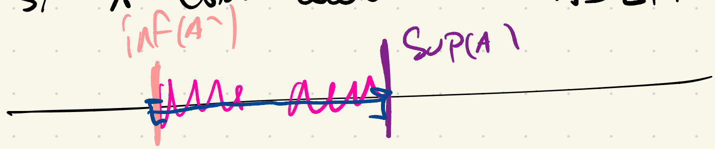
$\Rightarrow$ $\sup(A) \leq b$. Esto vale $\forall b \in B$.

Es decir, tenemos que $\sup(A) \leq b$ $\forall b \in B$.

$\Rightarrow$ $\sup(A)$ es cota inferior de B.

$\Rightarrow$ $\boxed{\sup(A) \leq \inf(B)}$

c) Si A está acotado $\Rightarrow$ $A \subseteq [\inf(A), \sup(A)]$



Sea $a \in A$ $\Rightarrow$ Por definición de ínfimo, $a \geq \inf(A)$.

" " " supremo, $\sup(A) \geq a$.

$\Rightarrow$ $\inf(A) \leq a \leq \sup(A)$

$\Rightarrow$ $a \in [\inf(A), \sup(A)]$

$= \{x \in \mathbb{R} : \inf(A) \leq x \leq \sup(A)\}$

Probamos que $\forall a \in A$, $a \in [\inf(A), \sup(A)]$

$\Rightarrow A \subseteq [\inf(A), \sup(A)]$.