Sección 7: Cálculo de extremos

Ejercicio 1: Determinar si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo.

b) $f(x) = e^{-x^2}$

Calculamos $f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2}(-x^2)'$

$= e^{-x^2}(-2x) = \underbrace{-2x\, e^{-x^2}}_{f'(x)}$; $e^{-x^2} > 0$

Buscamos x tales que $f'(x) = 0$:

$\underbrace{-2x}_{=0}\, \underbrace{e^{-x^2}}_{\neq 0} = 0 \iff -2x = 0$

$\iff \boxed{x = 0}$

El único candidato a extremo relativo es $x=0$.

crece — decrece

Sg(f') $+ + + + + \; 0 \; - - - - -$ (en 0)

$\Rightarrow$ f tiene un máximo global en 0.

El máximo es $\boxed{f(0) = e^{-0^2} = 1}$

Ejercicio 2:

2. (*) Calcular los extremos de las siguientes funciones en los dominios indicados

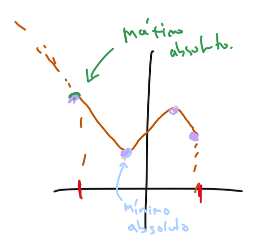
a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2,1]$ b) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-5,5]$

c) $f(x) = x^{10} + 20x + 10$ en $[-2,2]$ d) $f(x) = x^{10} + x^9 + 10$ en $[-2,2]$

e) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ en $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ f) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ en $[0,5]$

g) $f(x) = 48\cos^5(x) - 80\cos^3(x) + 45\cos(x)$, en $\mathbb{R}$

h) $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x+a|}$, $a>0$, en $\mathbb{R}$



a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2,1]$.

Queremos hallar los candidatos a extremos.

Primero hallamos los $x \in [-2,1]$ / $f'(x) = 0$.

$f'(x) = (x^3 - x^2 - 8x + 1)' = 3x^2 - 2x - 8$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 2x - 8 = 0$

$\iff x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(-8)}}{2\times 3}$

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{4+96}}{6} = \dfrac{2 \pm \sqrt{100}}{6}$; $\sqrt{100} = 10$

$= \dfrac{2 \pm 10}{6}$ → ~~$x = \frac{12}{6} = 2$~~ $\notin [-2,1]$

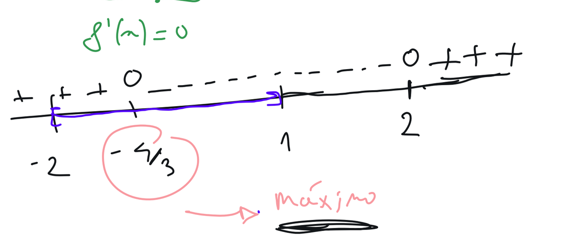
o → $x = \dfrac{-8}{6} = \dfrac{-4}{3} \in [-2,1]$

Nos interesan los $x \in [-2,1]$

$\Rightarrow$ Solo nos quedamos con $x = \frac{-4}{3}$

Los candidatos a máximo y mínimo son $\underbrace{x = -4/3}_{f'(x)=0}$, $x=-2$ y $x=1$

Evaluamos f en cada candidato:



* $\boxed{f(-4/3) = \frac{203}{27}}$ → máximo absoluto.

* $f(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 8(-2) + 1$

$= -8 - 4 + 16 + 1 = 5$

$\Rightarrow f(-2) = 5$

* $f(1) = (1)^3 - (1)^2 - 8(1) + 1 = 1 - 1 - 8 + 1 = -7$

$\Rightarrow \boxed{f(1) = -7}$ → mínimo (absoluto)

(Como f es continua y $[-2,1]$ es un intervalo, f tiene máx. y mín. absoluto por el teorema de Weierstrass)

e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $[-1, 1/2]$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Buscamos $x \in [-1, 1/2]$ / $f'(x) = 0$:

$f'(x) = \left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{(x+1)'(x^2+1) - (x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{x^2+1 - (x+1)(2x)}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{x^2+1 - (2x^2+2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \iff \dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = 0$

$\iff -x^2 - 2x + 1 = 0 \iff x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)(1)}}{-2}$

$\sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2}$

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{-2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{-2}$

$\iff x = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{-2} =$ ~~$-1 - \sqrt{2}$~~ $\notin [-1, 1/2]$

o $x = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{-2} = -1 + \sqrt{2} \in [-1, 1/2]$ ✓

Nuestros candidatos a extremos son $\underbrace{-1+\sqrt{2}}_{f'(x)=0}$, $\underbrace{-1,\ 1/2}_{\text{los bordes del intervalo.}}$

Ahora hacemos un razonamiento análogo a la parte anterior para terminar...

Sección 8, ejercicio 1.

1. (*)

a) ¿Cuál es la mayor área posible de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 cm de largo?

b) Hallar el rectángulo de menor perímetro cuya área es 4. Hallar el rectángulo de mayor área cuyo perímetro es 8.

c) Hallar el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

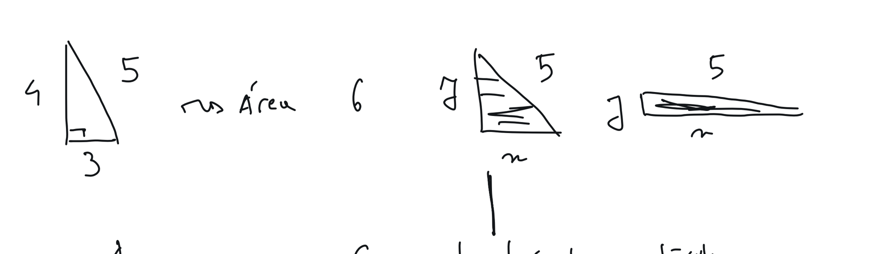
d) Sea ε la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 16$. Se considera un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes, y cuyos vértices pertenecen a ε. ¿Cuál es la mayor área que puede tener dicho rectángulo?

a) 4 b) $4\sqrt{2}$ c) 0 d) $8\sqrt{2}$ e) 16

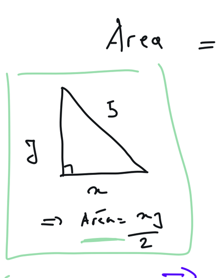
$- 2x + 2y$

$- \boxed{xy = 4}$

$y = \frac{4}{x}$



Área $= \dfrac{xy}{2}$. Como el triángulo es rectángulo, x e y verifican que $\underline{x^2+y^2=25}$



Pitágoras: $x^2+y^2 = 5^2$

$y^2 = 25 - x^2$

$y = \sqrt{25-x^2}$

$\Rightarrow$ Área $= \dfrac{xy}{2} = \dfrac{x\sqrt{25-x^2}}{2}$ ← Es una función en x.

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{x\sqrt{25-x^2}}{2}$ nos da el área en función de x.

$f: [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Ahora buscamos el máximo de f en $[0,5]$:

$f'(x) = \left(\dfrac{x\sqrt{25-x^2}}{2}\right)' = \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{25-x^2}\right)' = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{25-x^2} + x\left(\sqrt{25-x^2}\right)'\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{25-x^2} + x\,(-\cancel{2}x)\,\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{25-x^2}}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{25-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{25 - x^2 - x^2}{\sqrt{25-x^2}}\right)$

$\left(\sqrt{25-x^2}\right)'$

$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$

$f(x) = \sqrt{x} \to f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$g(x) = 25 - x^2 \to g'(x) = -2x$

$= \boxed{\dfrac{25 - 2x^2}{2\sqrt{25-x^2}} = f'(x)}$

x / $f'(x) = 0 \iff \dfrac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}} = 0 \iff 25 - 2x^2 = 0$

$\iff 2x^2 = 25$

$x^2 = \dfrac{25}{2}$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{25}{2}} = \pm\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ Nos interesa $\boxed{x = \dfrac{5}{\sqrt{2}} \in [0,5]}$

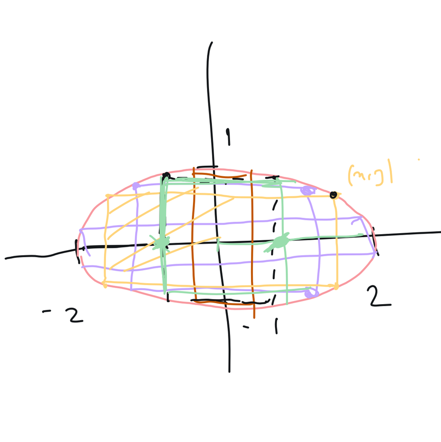
Sg(f') $+ + + \; 0 \; - - - -$ (0, $\frac{5}{\sqrt{2}}$, 5) $\Rightarrow$ f tiene un máximo en $5/\sqrt{2}$.

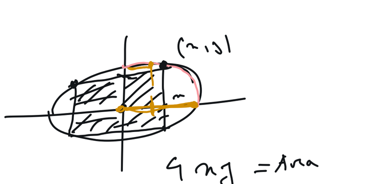
$\Rightarrow$ La mayor área posible es $f(5/\sqrt{2}) = \dfrac{\frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{25 - \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}}{2}$

$= \dfrac{\frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{25 - \frac{25}{2}}}{2}$

$= \dfrac{\frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{25}{2}}}{2} = \dfrac{\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\frac{5}{\sqrt{2}}}{2} = \dfrac{\frac{25}{2}}{2} = \boxed{\dfrac{25}{4}}$ ✓

c) Rectángulo de mayor área inscrito en la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$





$4xy =$ Área

Restricción $x^2 + 4y^2 = 4$

$y =$

$x \in [0,2]$