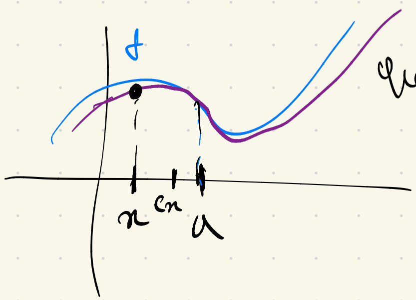
Fórmula de Lagrange para el resto.

$$f(x) = P_n(f,a)(x) + \underbrace{R_n(f,a)(x)}_{\text{Resto o error del polinomio.}}$$

→ Queremos que sea "chico"

Hasta ahora tenemos que: $\lim_{x \to a} \frac{R_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0$

Fórmula de Lagrange para el resto: f $n+1$ veces derivable $\exists\, c_x$ entre x y a tal que $R_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.



Sección 2

Ejer. 1: Aproximaciones racionales.

a) Dar una aproximación racional del número e con un error menor a 10^{-4}

b) Dar una aproximación racional del número $\sin(2)$ con un error menor a 10^{-4}

a) $P_n(e^x,0)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

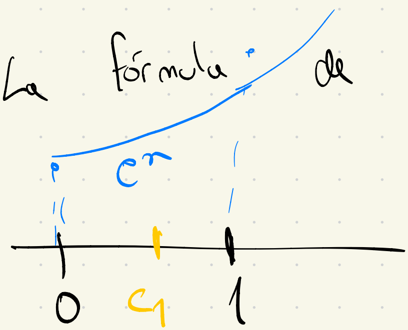
$$e^x = P_n(e^x,0)(x) + \underbrace{R_n(e^x,0)(x)}_{\text{error}} \qquad \begin{pmatrix} a=0 \\ x=1 \end{pmatrix}$$

$$e = e^1 = \underbrace{P_n(e^x,0)(1)}_{\text{Aproximación racional}} + \underbrace{R_n(e^x,0)(1)}_{\text{error de la aproximación racional}}$$

Queremos elegir n de forma que el error sea menor a 10^{-4}.

$\Rightarrow$ Queremos que $|R_n(e^x,0)(1)| < 10^{-4}$

La fórmula de Lagrange nos dice que $\exists$ c_1 entre 0 y 1 tal que



$$R_n(e^x,0)(1) = \frac{f^{(n+1)}(c_1)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}$$

$$|R_n(e^x,0)(1)| = \left|\frac{e^{c_1}}{(n+1)!}\,1^{n+1}\right| = \left|\frac{e^{c_1}}{(n+1)!}\right|$$

c_1 está entre 0 y 1 $\rightarrow$ $\le \left|\frac{e}{(n+1)!}\right| < \left|\frac{4}{(n+1)!}\right|$

$$\Rightarrow \left| R_n(e^x, 0)(1) \right| < \frac{4}{(n+1)!}$$

Basta con tomar n tal que

$$\frac{4}{(n+1)!} < 10^{-4} = \frac{1}{10^4}$$

$$\Longleftrightarrow 4 \times 10^4 < (n+1)!$$

$$\boxed{40000 < (n+1)!}$$

b) Aproximación racional para $\sin(2)$ con un error menor a 10^{-4}.

$$\sin(x) = P_n(\sin(x), 0)(x) + R_n(\sin(x), 0)(x)$$

$$\Rightarrow \sin(2) = \underbrace{P_n(\sin(x), 0)(2)}_{\text{Aproximación racional}} + \underbrace{R_n(\sin(x), 0)(2)}_{\text{Error.}}$$

$$P_n(\sin(x),0)(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

Buscamos $n \,/\, |R_n(\sin(x),0)(2)| < 10^{-4}$

$c_2 \in [0,2]$

$$|R_n(\sin(x),0)(2)| \overset{\triangle}{=} \left| \frac{f^{(n+1)}(c_2)}{(n+1)!}(2-0)^{n+1} \right|$$

Fórmula del resto de Lagrange

$$= \frac{\left|f^{(n+1)}(c_2)\right|}{(n+1)!} \cdot 2^{n+1}$$

≤ 1

$f^{(n+1)} = \pm \sin$ o $\pm \cos$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} 2^{n+1}$$

$$= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\Rightarrow$ Alcanza con elegir $n \,/\, \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-4}$

Sección 1.

Ejercicio 11: $f(x) = e^x - x - 2 + \cos(x) - \frac{x^3}{6}$

a) Hallar el McLaurin de orden 4 de f.

- $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

- $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

- $-2 - x - \frac{x^3}{6} \approx -2 - x - \frac{x^3}{6}$

$$\Rightarrow P_4(f,0)(x) = \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!}$$

$$+ \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\cancel{-2} - \cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{6}}$$

$$= \frac{2}{4!} x^4 = \frac{2}{24} x^4 = \frac{x^4}{12}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_4(f,0)(x) = \frac{x^4}{12}}$$

$f(0)=0$

$f^{(1)}(0)=0$

$\vdots$

$f^{(3)}(0)=0$

b) Analizar si f presenta un extremo relativo en 0.

Como $f^{(4)}(0)$ es la primera derivada que no se anula en 0, f tiene un extremo relativo en 0.

Como $\frac{1}{12} > 0$ (el coeficiente del Taylor), f tiene un mínimo relativo en 0.

$$\frac{x^4}{12} = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(0) = \frac{4!}{12} = \frac{24}{12} = 2$$

c) Calcular, discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el

$\left(x^\alpha = x^{\alpha-4}x^4\right)$

límite: $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^4 \cdot x^{\alpha-4}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^4} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-4}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{P_4(f,0)(x)}{x^4} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-4}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x^4}/12}{\cancel{x^4}} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-4}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-4}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 4 \\ 1/12 & \text{si } \alpha = 4 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 4 \end{cases}$$

Ejer 12:

$$f(a) = f^{(1)}(a) = \dots = f^{(k)}(a) = 0 \quad , f^{(k+1)}(a) \neq 0$$

a) Probar que existe $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont. /

$$f(x) = (x-a)^{k+1} g(x) \quad y \quad g(a) \neq 0.$$

Quiero definir g.

Defino $\boxed{g(x) = \dfrac{f(x)}{(x-a)^{k+1}}}$ si $x \neq a$

Solo falta definir $g(a)$

Porque quiero g cont.

Tiene que ser $g(a) = \lim_{x \to a} g(x)$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^{k+1}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{P_{k+1}(f,a)(x)}{(x-a)^{k+1}} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} \cancel{(x-a)^{k+1}}}{\cancel{(x-a)^{k+1}}}$$

$P_{k+1}(f,a)(x)$

$$= \underbrace{\cancel{f(a)}}_{=0} + \underbrace{\cancel{f^{(1)}(a)}}_{=0}(x-a) + \underbrace{\cancel{\frac{f^{(2)}(a)}{2!}}}_{0}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$

$\neq 0$

$$L = \lim_{x \to a} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} = \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow \boxed{g(a) = \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} \neq 0}$$