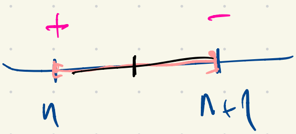
# Sección 5.2 : Teorema de Bolzano

**Ejercicio 1, parte b)** Hallar un entero $n$ tal que

$\exists$ $x$ que verifica $n \leq x \leq n+1$ y $f(x)=0$

a) $f(x)=x^5+5x^4+2x+1$ d) $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+x$




(n=0)

$\star\ f(0)=1$

$\star\ f(-1)=(-1)^5+5(-1)^4+2(-1)+1$
$=-1+5-2+1=3$

$\star\ f(-2)=(-2)^5+5(-2)^4+2(-2)+1$
$=-32+80-4+1>0$

$\vdots$

$\star\ f(-4)=(-4)^5+5(-4)^4+2(-4)+1$
$=(-4)^4(-4+5)-8+1$
$=256-8+1>0$

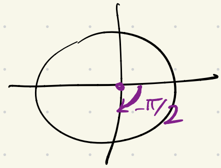
$\star\ f(-5)=(-5)^5+5\overbrace{(-5)^4}^{=5^4}+2(-5)+1$
$=\cancel{-5^5}+\cancel{5^5}-10+1$
$=-9<0$

$\Rightarrow$ Si $n=-5$, $n+1=-4$, por Bolzano $\exists\ x\in(-5,-4)$ / $f(x)=0$.

d) $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+x$. $\star\ f(0)=\cos\left(\frac{\pi\cdot 0}{2}\right)+x$
$=\cos(0)+0$
$=1$

$* f(-1) = \cos\left(\frac{\pi(-1)}{2}\right) - 1 = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) - 1$

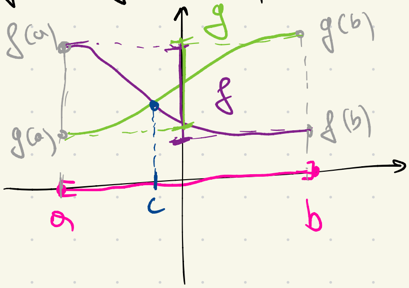
$= 0 - 1 = -1$




$\Rightarrow$ Por Bolzano, $\exists\, x \in (-1,0) \,/\, f(x) = 0.$

---

**Ejercicio 3**: Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas. Si $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, probar que existe $c \in (a,b) \,/\, f(c) = g(c)$.




Definimos $h(x) = f(x) - g(x)$.

Como $h$ es una resta de funciones continuas en $[a,b]$, $h$ es continua en $[a,b]$.

Evaluamos:

- $h(a) = f(a) - g(a) > 0$ porque $f(a) > g(a)$.
- $h(b) = f(b) - g(b) < 0$ porque $f(b) < g(b)$

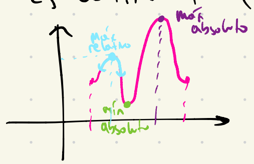
$\Rightarrow$ Por Bolzano, $\exists\, c \in (a,b) \,/\, h(c) = 0.$

Pero $0 = h(c) = f(c) - g(c) \Rightarrow \boxed{g(c) = f(c)}.$

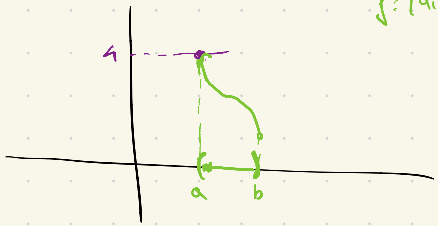
---

# Teorema de Weierstrass:

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $f$ tiene máximo y mínimo absolutos en $[a,b]$.



$f: (a,b) \to \mathbb{R}$

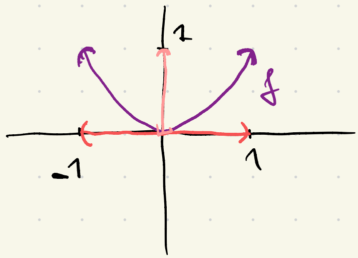



**Def:** $f: D \to \mathbb{R}$. Decimos que $f$ tiene máximo absoluto si $\exists\, c \in D$ tal que $f(c) \geq f(x)$ $\forall x \in D$.

## Sección 5.3.

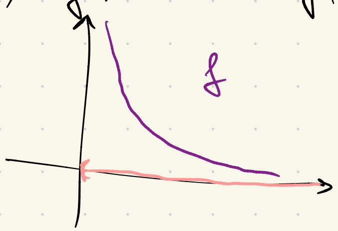
**Ejercicio 1:** Para las siguientes funciones, determinar cuáles están acotadas superior e inferiormente y, en caso de estarlo, si tienen máximo o mínimo.

a) $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$ / $f(x) = x^2$




* Está acotada superiormente: $1 \geq f(x) \quad \forall x \in (-1,1)$
* Está acotada inferiormente: $-100 \leq f(x) \quad \forall x \in (-1,1)$
* $f$ **no** tiene máximo
* $f$ tiene mínimo $0$, que se da en $x=0$.

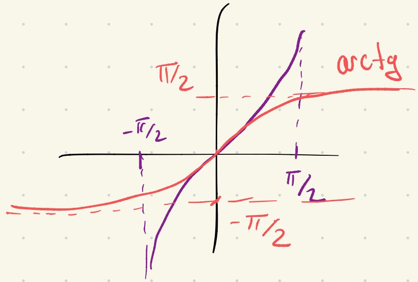
c) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$




* $f$ **no** está acotada superiormente
* $f$ está acotada inferiormente pero no tiene mínimo.

**Ejercicio 5:**

**Af 1:** Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$, y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$, entonces $f$ tiene máx. y mín.


$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x) = \pi/2$$

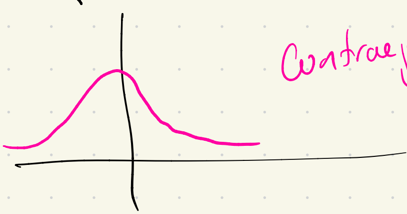
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

no tiene máx ni mínimo.

Af3: Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ entonces tiene máx y mínimo

$f(x) = e^{-x^2}$ : $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0 = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2}$, pero $e^{-x^2}$ **no** tiene mínimo.

Contraejemplo



Af4: Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ entonces tiene máx o mínimo