Continuidad:

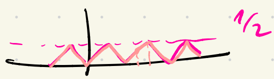
Decimos que f es continua a si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 /$

si $0 \leq |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Es equivalente a que $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$

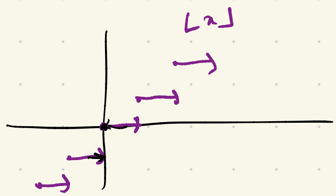
Ejercicio 1. Decir en que puntos es continua cada función.

a) $f(x) = [x]$



Es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$



* f no es continua en $\mathbb{Z}$ (los limites laterales no coinciden)

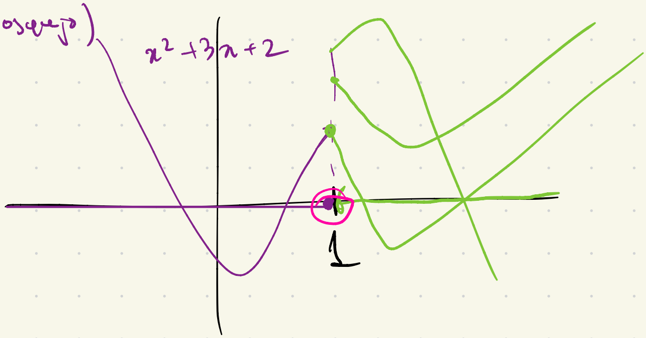
* $\boxed{f \text{ es continua en } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.}$

Ejercicio 2: Determinar para que valores $a, b \in \mathbb{R}$ la función f es continua.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

$\boxed{\text{$f$ es continua si es continua en todo punto de su dominio.}}$

(Bosquejo)



Hay que hallar los valores de a y b de forma que f sea continua en 1.

Para que f sea continua en 1, tiene que ocurrir que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1).$$

Tenemos $f(1) = 1^2+3\times 1+2 = 6$

* $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1^2+3\times 1+2 = 6$

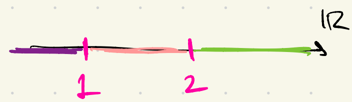
* $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} ax^2+bx+1 = a\cdot 1^2+b\cdot 1+1$
$= \boxed{a+b+1}$

Necesitamos que $6 = a+b+1 \iff \boxed{a+b=5}$

Queda que f es continua si y solo si $\underbrace{a+b=5}_{a=5-b}$

(Hay infinitas soluciones)

c) $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x<1 \\ ax+b & \text{si } 1\leq x\leq 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$



Para que f sea continua, tiene que ser continua en 1 y 2.

* Para que f sea continua en 1, tiene que ocurrir:

$$\sin(\pi \cdot 1) = a \cdot 1 + b$$

$$\Leftrightarrow \boxed{0 = a + b} \rightarrow \text{1era condición.}$$

* Para que f sea continua en 2, tiene que ocurrir:

$$a \cdot 2 + b = 2^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2a + b = 4} \rightarrow \text{2da condición}$$

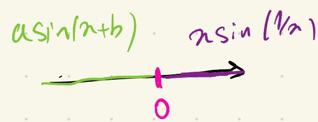
Obtuvimos el sistema:

$$\begin{cases} a + b = 0 & \rightsquigarrow b = -a \\ 2a + b = 4 & \rightsquigarrow 2a - a = 4 \end{cases}$$

$$a = 4$$

$$\Rightarrow b = -4$$

$\Rightarrow$ Para que f sea continua, tiene que ser $a = 4$, $b = -4$.



d) $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x > 0 \\ a \sin(x + b) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

* Para que f sea continua en 0, tiene que ocurrir que:

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^+} f(x)}_{0} = \underbrace{f(0)}_{a\sin(b)} = \underbrace{\lim_{x \to 0^-} f(x)}_{a\sin(b)}$$

* $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin(1/x)}_{\text{acotado.}} = 0$$

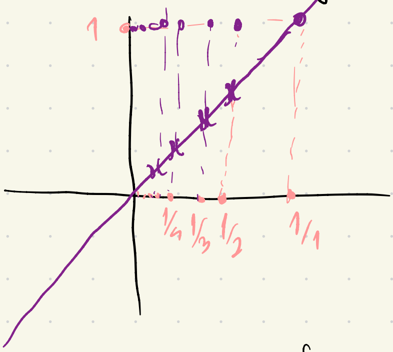
* $f(0) = a\sin(0+b) = a\sin(b)$

* $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} a\sin(x+b) = a\sin(0+b) = a\sin(b)$

$\Rightarrow$ Para que f sea continua, tiene que ocurrir que $0 = a\sin(b) \longleftrightarrow a=0$ o $\sin(b)=0$

$\longleftrightarrow \boxed{a=0 \text{ o } b=k\pi, \text{ con } k\in\mathbb{Z}.}$

Ejercicio 3: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x\neq \frac{1}{n} \text{ con } n\in\mathbb{N}. \\ 1 & \text{si } x = 1/n \text{ con } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$



Probar que f no es continua en 0.

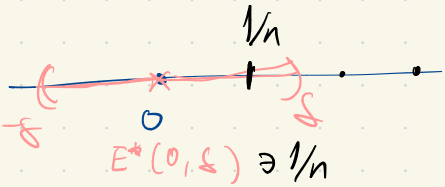
$f(0)=0$.

Para probar que f no es continua en 0, alcanza con probar que $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$.

$\left[\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \longleftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \ /\ \text{si } 0<|x|<\delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon \right]$

$\hookrightarrow$ La negación de esto es que $\exists \varepsilon>0\ \forall\delta>0$, no es cierto que si $0<|x|<\delta \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$.

Podemos tomar $\varepsilon = 1/2$. $\forall \delta>0$, $\exists n\in\mathbb{N} \ /\ x=1/n$ verifica $0<|1/n|<\delta$.



Luego, $|f(1/n)| = 1 \geq \varepsilon = 1/2$.

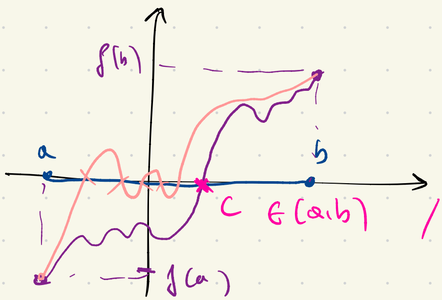
Es decir, $\varepsilon = 1/2$ verifica que

$\forall \delta > 0 \quad \exists\, x \in E^*(0,\delta)$

tal que $|f(x)| \geq \varepsilon$.

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) \neq 0 \Rightarrow f$ no es continua en 0.

Teorema de Bolzano:



$c \in (a,b) \;/\; f(c) = 0$

Sección 2:

Ejercicio 1: Existencia de soluciones

a) Demuestre que la ecuación $x + 2\cos(x) = 0$ tiene al menos una solución

Definimos $f(x) = x + 2\cos(x) \Rightarrow f$ es una función continua.

* Tenemos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \overbrace{2\cos(\pi/2)}^{=0} = \frac{\pi}{2} > 0$.

* Tenemos que $f\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{-\pi}{2} + \overbrace{2\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)}^{=0} = -\frac{\pi}{2} < 0$

Luego, el teorema de Bolzano nos dice que existe $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(x) = 0$, es decir, $x + 2\cos(x) = 0$.