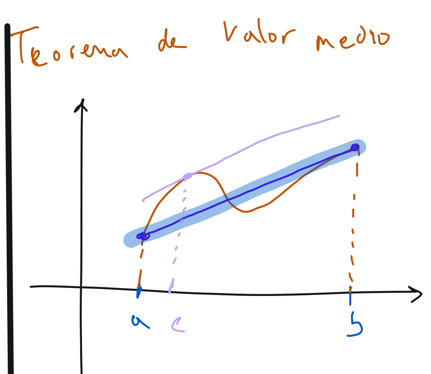
Teorema de Valor medio de Lagrange: f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).



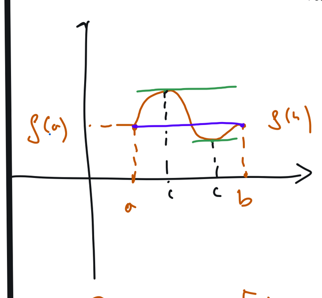
$\exists\ c \in (a,b)$ /

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Caso particular: Teorema de Rolle: f continua en $[a,b]$, derivable en (a,b). $f(a)=f(b)$.

$\exists\ c \in (a,b)$ /

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{0}{b-a} = 0$$



$1-\sqrt[3]{x^2}$

Sección 5:

Ejercicio 3: Verificar si las siguientes funciones están en las hipótesis de Lagrange en cada intervalo y en caso de estarlo, hallar c que verifique lo que dice el teorema.

a) $f(x) = x + 1/x$ en $[1,3]$

f es continua en $[1,3]$ y derivable en $(1,3)$.
$\Rightarrow$ Está en las hipótesis de Lagrange.

$\Rightarrow \exists\ c \in (1,3)$ tal que $\underbrace{f'(c)}_{(*)} = \underbrace{\frac{f(3)-f(1)}{3-1}}_{(**)}$

$(**)$: $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{3+1/3-(1+1/1)}{2}$

$= \frac{1+1/3}{2} = \frac{4/3}{2} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{2}{3}$

$(*)$ $f'(c)$

$f'(x) = (x+1/x)' = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(c) = 1 - \frac{1}{c^2}$

$\Rightarrow \boxed{1 - \frac{1}{c^2} = \frac{2}{3}}$ ← Despejar c.

$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{c^2}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{c^2} \Longleftrightarrow c^2 = 3$
$\Rightarrow c = \pm\sqrt{3}$

Como $c \in (1,3) \Rightarrow \boxed{c = +\sqrt{3}}$

b) $f(x) = x\log(x)$ en $[1,e]$

$\Rightarrow f$ está en las hipótesis de Lagrange

$\Rightarrow \exists\ c \in (1,e)$ / $\underbrace{f'(c)}_{(*)} = \underbrace{\frac{f(e)-f(1)}{e-1}}_{(**)}$

$(*)$ $f'(x) = (x\log(x))' = (x)'\log(x) + x(\log(x))'$
$= 1\log(x) + x\left(\frac{1}{x}\right)$
$= \log(x) + 1$

$\Rightarrow \boxed{f'(c) = \log(c)+1}$

$*1$: $\frac{f(e)-f(1)}{e-1} = \frac{e\overbrace{\log(e)}^{=1} - 1\cdot\overbrace{\log(1)}^{=0}}{e-1} = \frac{e}{e-1}$

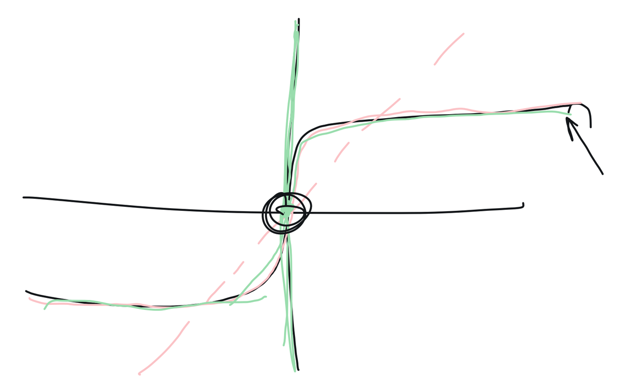
$\Rightarrow \log(c)+1 = \frac{e}{e-1} \Longleftrightarrow \log(c) = \frac{e}{e-1} - 1 = \frac{e-(e-1)}{e-1}$

$\frac{e}{e-1} - 1 = \frac{e}{e-1} - \left(\frac{e-1}{e-1}\right)$
$= \frac{e-(e-1)}{e-1}$
$= \frac{e-e+1}{e-1}$
$= \frac{1}{e-1}$

$\boxed{\log(c) = \frac{1}{e-1}} \Rightarrow e^{\log(c)} = e^{1/(e-1)}$

$c = e^{\frac{1}{e-1}}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el intervalo $[-1,1]$.



$\sqrt[3]{x}$ no es derivable en 0

$\Rightarrow f$ no está en las hipótesis de Lagrange.

Ejercicio 4: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$

Mostrar que $f(1) = f(-1) = 0$ ✓ pero sin embargo, su derivada no se anula en el intervalo $(-1,1)$.

Explicar por qué esto no contradice el teorema de Rolle.

No contradice el teorema de Rolle porque f no es derivable en 0:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{1-\sqrt[3]{x^2}-(1-\sqrt[3]{0^2})}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1-\sqrt[3]{x^2}-1}{x}$$

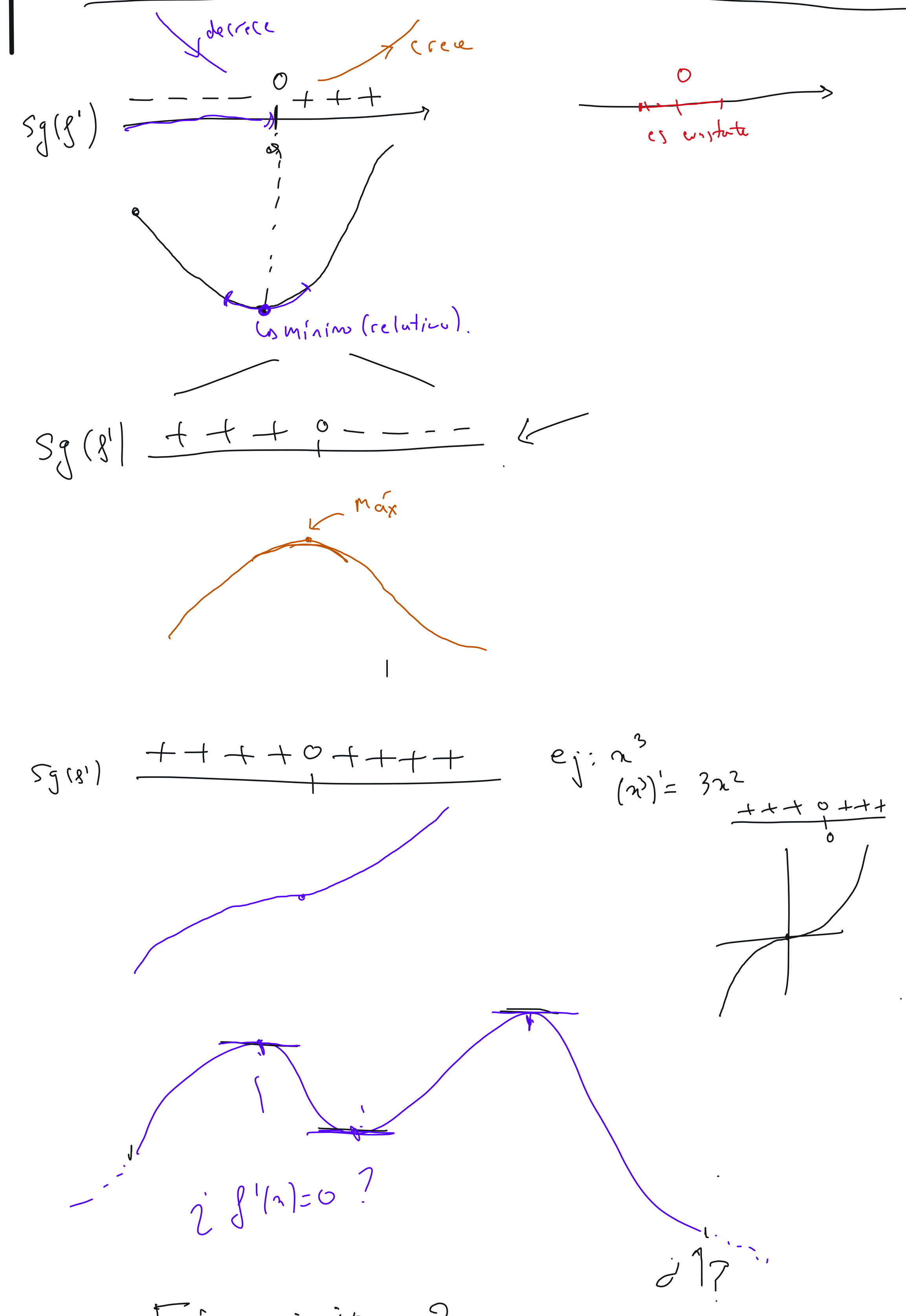
$$= \lim_{x\to0^+} \frac{-\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{-(x)^{2/3}}{x} = \lim_{x\to0^+} -x^{-1/3} = \lim_{x\to0^+} \frac{-1}{x^{1/3}} = -\infty$$

$-\frac{x^{2/3}}{x^1} = -x^{2/3-1} = -x^{-1/3}$

$\Rightarrow f$ no es derivable en 0.

$(1-\sqrt[3]{x^2})' = -(\sqrt[3]{x^2})' = -(x^{2/3})' = -\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1}$

$= -\frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$ ← ¿x=0??



Ejercicio 3

a) Probar las siguientes igualdades entre funciones trigonométricas

a) $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ b) $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) ¿$(\arcsin(x))'$?

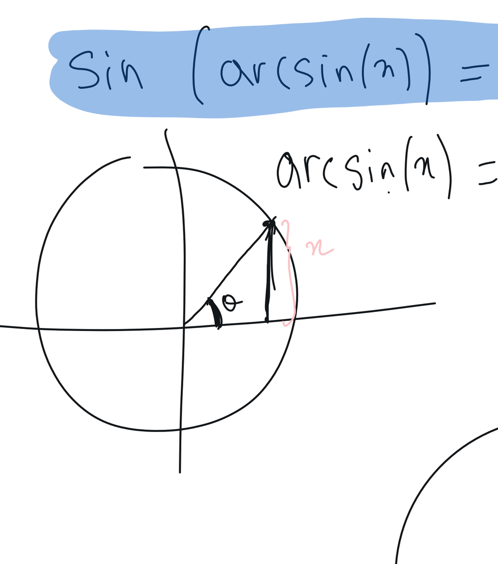
$\sin(\arcsin(x)) = x \Rightarrow (\sin(\arcsin(x)))' = (x)'$

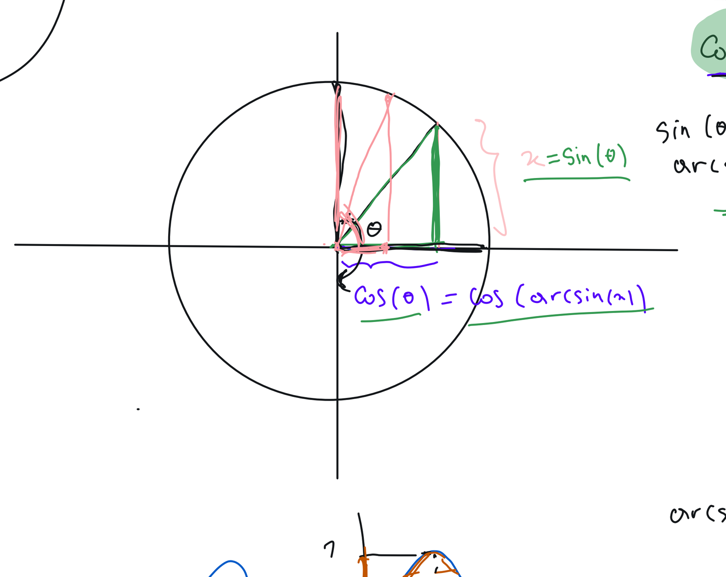
$\arcsin(x) = \theta$

$\sin'(\arcsin(x))\,(\arcsin(x))' = 1$

$\cos(\arcsin(x))\,(\arcsin(x))' = 1$

$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$





$\cos(\theta)$

$\sin(\theta) = x$.
$\arcsin(x) = \theta$

$1 = \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$

$1 = x^2 + (\cos(\arcsin(x)))^2$

$(\cos(\arcsin(x)))^2 = 1 - x^2$

$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

$\arcsin: [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$