Regla de L'Hopital: $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=0$, f y g derivables

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ej: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ ✓ (numerador $\to 0$, denominador $\to 0$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1$$

L'Hopital también vale si $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$

También vale para límites laterales.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$ y $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ $\rightsquigarrow$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Ej:

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad$ $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ($f'(x)\to 1$, $g'(x)\to 0$) $\rightsquigarrow$ ¿$+\infty, -\infty, \nexists$?

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$

Sección 4 (práctica 6)

Ejercicio 1: a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{4x}}{\sin(x)}$ (numerador: $e^{4x}\to 1$, $1-e^{4x}\to 0$; denominador $\to 0$) Indeterminado

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-e^{4x})'}{(\sin(x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{-4e^{4x}}{\cos(x)}=\frac{-4}{1}=-4$$

($-4e^{4x}\to -4$, $\cos(x)\to 1$)

$$(1-e^{4x})'=(1)'-(e^{4x})'$$
$$=0-4e^{4x}=-4e^{4x}$$

Regla de la cadena: $(f(g(x)))'=f'(g(x))\,g'(x)$

Ej: $f(x)=e^x$, $g(x)=4x$ $\;\to\; f(g(x))=e^{4x}$

$f'(x)=e^x$, $g'(x)=4$ $\;\Rightarrow\; f'(g(x))\,g'(x) = e^{4x}\,4$

En general, si $\alpha\in\mathbb{R}$: $(e^{\alpha x})'=\alpha e^{\alpha x}$

$\Rightarrow$ Por L'Hopital, $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{4x}}{\sin(x)}=-4}$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2+\sin^2(x)}$ (numerador $\to 1-1-0=0$; denominador $\to 0+0=0$) Indeterminado

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x^2+\sin^2(x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x+2\sin(x)\cos(x)}$$

($e^x\to 1$, $e^x-1\to 0$; denominador $\to 0+0=0$) $\leftarrow$ Indeterminado

$(\sin^2(x))' \overset{\text{Por Leibniz}}{=} (\sin(x)\sin(x))' = \cos(x)\sin(x)+\sin(x)\cos(x)$ $\quad$ ($\sin(x)\cos(x)+\sin(x)\cos(x)$)

$= 2(\sin(x)\cos(x))$ ✓

(Por Regla de la cadena)

$g(x)=\sin(x)$, $f(x)=x^2$ $\;\Rightarrow\; f(g(x))=(\sin(x))^2$

$f'(x)=2x$, $g'(x)=\cos(x)$ $\;\Rightarrow\; (\sin^2(x))'=f'(g(x))\,g'(x)$

$= 2\sin(x)\cos(x)$ ✓

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x+2\sin(x)\cos(x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2+2\cos^2(x)-2\sin^2(x)}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

($e^x\to 1$; denominador $\to 2+2-0=4$)

$(2\sin(x)\cos(x))'=(2\sin(x))'\cos(x)+2\sin(x)(\cos(x))'$

$=2\cos(x)\cos(x)+2\sin(x)(-\sin(x))$

$=2\cos^2(x)-2\sin^2(x)$

(Por L'Hopital) $\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x+2\sin(x)\cos(x)}=1/4 \;\Rightarrow\; \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2+\sin^2(x)}=1/4}$ (Por L'Hopital)

j) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$ (numerador $\to 1-1-0=0$; denominador $\to 0(1-1)=0$) Indeterminado

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}$ $\to$ Indeterminado. ($\frac{1}{x}\to+\infty$, $\frac{1}{e^x-1}\to+\infty$; $+\infty-\infty$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x(e^x-1))'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$$

(numerador $\to 1-1=0$; denominador $\to 1-1+0=0$) $\to$ Indeterminado

$(x(e^x-1))'=(x)'(e^x-1)+x(e^x-1)'$

$=e^x-1+xe^x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1+xe^x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$$

($e^x\to 1$; $2e^x+xe^x\to 2+0\cdot 1=2$)

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{2}}$$

Ejercicio 2: b) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\log(x))}{\sin(\pi x)}$ $\to$ Indeterminado

(numerador: $\log(x)\to 0$, $\to \sin(0)=0$; denominador $\to \sin(\pi\cdot 0)=0$)

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sin(\log(x)))'}{(\sin(\pi x))'}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\log(x))\left(\frac{1}{x}\right)}{\pi\cos(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\log(x))}{\pi x\cos(\pi x)}=\boxed{\frac{1}{-\pi}}$$

($\log(x)\to 0$, $\cos(\log(x))\to 1$; $\pi x\cos(\pi x)\to \pi\cdot 1\cos(\pi)=-\pi$)

$(\sin(\log(x)))'$

$f(x)=\sin(x)$, $g(x)=\log(x)$ $\;\to\; f(g(x))=\sin(\log(x))$

$\Rightarrow (\sin(\log(x)))'=f'(g(x))\,g'(x)$

$f'(x)=\cos(x)$, $g'(x)=1/x$ $\;\to\; =\cos(\log(x))\left(\frac{1}{x}\right)$

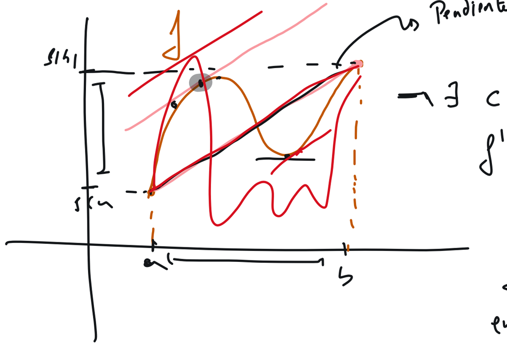
$(\sin(\pi x))' = f'(g(x))\,g'(x)$

$f(x)=\sin(x)$, $g(x)=\pi x$ $\quad = \boxed{\cos(\pi x)\,\pi}$

$\Rightarrow f(g(x))=\sin(\pi x)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\log(x))}{\sin(\pi x)}=\frac{-1}{\pi}$$

Valor medio de Lagrange:



$\to$ Pendiente: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\to \exists\, c\in(a,b)$ / $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

f tiene que ser continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)