Recta tangente (sección 2 del práctico 4):

recta tangente al gráfico por $(a, f(a))$

↳ verifica 2 cosas:

1) Pasa por el punto $(a, f(a))$

2) La pendiente es $f'(a)$

Probemos que la recta tangente por $(a, f(a))$ es

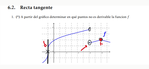
$$\boxed{r(x) = f'(a)(x-a) + f(a)} = \underbrace{f'(a)\,x}_{\text{pendiente}} - \underbrace{f'(a)\,a + f(a)}_{\text{término independiente}}$$

$$r(a) = f'(a)(a-a) + f(a)$$
$$= f'(a)\cdot 0 + f(a)$$
$$= f(a)$$

$\Rightarrow$ La recta pasa por el punto $(a, f(a))$ ✓

6.2. **Recta tangente**

1. (*) A partir del gráfico determinar en qué puntos no es derivable la función f

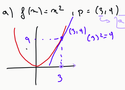


4. (*) En cada uno de los siguientes casos, calcular y graficar la recta tangente de la función f en el punto p

a) x^2, $p = (3, 9)$ b) $\cos(x)$, $p = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ c) $\boxed{\frac{1}{2^x - 1}, p = (0, 0)}$ d) $\sqrt{x}$, $p = (4, 2)$

$$r(x) = \underbrace{f'(a)}(x-a) + \underbrace{f(a)}$$

a) $f(x) = x^2$, $p = (3, 9)$ $\Rightarrow \boxed{a = 3}$



* $f(3) = (3)^2 = 9$ ✓
* $f'(x) = (x^2)' = 2x$
  $\Rightarrow f'(3) = 2\cdot(3) = 6$

$\Rightarrow f(3) = 9$ y $f'(3) = 6$

$\Rightarrow r(x) = f'(3)(x-3) + f(3)$
$= 6(x-3) + 9$
$= 6x - 18 + 9$
$= 6x - 9$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $p = (0, 0)$ ✓

$f(0) = \frac{0}{0^2+1} = 0$

Necesitamos $f(0)$ y $f'(0)$

* $f(0) = 0$ ✓
* ¿$f'(0)$? Calculamos $f'(0)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x^2+1} - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\underbrace{x^2}_{\to 0}+1} = 1$$

$\Rightarrow f'(0) = 1$

$\Rightarrow r(x) = f'(0)(x-0) + f(0) = 1\cdot x + 0$
$= x$

$\Rightarrow \boxed{r(x) = x}$

5. (*) Determinar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los cuales las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = cx - x^2$ tienen la misma recta tangente en el punto $(3, 3)$.

Queremos que f y g tengan la misma recta tangente por el punto $(3,3)$

$\Rightarrow$ En primer lugar necesitamos que f y g pasen por $(3,3)$

Es decir, queremos que $f(3) = 3$ y $g(3) = 3$.

* $f(3) = 3$:

$$f(3) = 3^2 + a\cdot 3 + b = 9 + 3a + b$$

$$f(3) = 3 \iff 9 + 3a + b = 3$$
$$\iff 3a + b = 3 - 9$$
$$\iff \boxed{3a + b = -6}$$ ✓

* $g(3) = 3$:

$$g(3) = c\cdot 3 - 3^2 = 3c - 9$$

$$\Rightarrow g(3) = 3 \iff 3c - 9 = 3$$
$$\iff 3c = 3 + 9$$
$$\iff c = \frac{12}{3}$$
$$\iff \boxed{c = 4}$$ ✓

* Queremos que f y g tengan la misma recta tangente por $(3,3)$.

Esto ocurre si y solo si $f'(3) = g'(3)$

$f'(3)(x-3) + f(3) = \boxed{f'(3)(x-3) + 3}$

$g'(3)(x-3) + g(3) = \boxed{g'(3)(x-3) + 3}$

son iguales $\iff \boxed{f'(3) = g'(3)}$

Calculamos primero $f'(x)$:

* $f'(x) = (x^2 + ax + b)' = 2x + a$
  $\Rightarrow \boxed{f'(3) = 2\cdot 3 + a = 6 + a}$
* $g'(x) = (cx - x^2)' = c - 2x$
  $\Rightarrow g'(3) = c - 2\cdot 3 = c - 6$

Como ya teníamos que $c = 4$, nos queda $g'(3) = 4 - 6 = -2$

$\Rightarrow \boxed{g'(3) = -2}$

$\Rightarrow$ Nos queda la ecuación $6 + a = -2$
$\iff \boxed{a = -8}$ ✓

Sustituimos a en $3a + b = -6$:

$3(-8) + b = -6$
$-24 + b = -6$
$b = 24 - 6$
$\boxed{b = 18}$

Conclusión: $a = -8$, $b = 18$, $c = 4$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 8x + 18 \\ g(x) &= 4x - x^2 \end{aligned}}$$

Sección 3: Cálculo de derivadas.

6.3. Cálculo de derivadas

A partir de esta sección, a menos que se diga de forma explícita, se pueden usar las siguientes derivadas

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (\sin(x))' = \cos(x), \quad (\cos(x))' = -\sin(x)$$
$$(\log(x))' = \frac{1}{x} \text{ para todo } x > 0, \quad (e^x)' = e^x$$

Propiedades de la derivada:

1) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$

Ejemplo: $(3e^x)' = 3(e^x)' = 3e^x$

2) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Ejemplo: $(7\sin(x) + x^2)' = (7\sin(x))' + (x^2)'$
$= 7(\sin(x))' + 2x$
$= 7\cos(x) + 2x$

3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Ejemplo: $(e^x x^2)' = (e^x)'x^2 + e^x(x^2)'$
$= e^x x^2 + e^x 2x$

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Ejemplo: $\left(\frac{x^2}{\sin(x)}\right)' = \frac{(x^2)'\sin(x) - x^2(\sin(x))'}{(\sin(x))^2}$
$= \frac{2x\sin(x) - x^2\cos(x)}{(\sin(x))^2}$ ✓

5) Regla de la cadena:

$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Ejemplo: $(e^{\sin(x)})' = e^{\sin(x)}(\sin(x))'$
$= e^{\sin(x)}\cos(x)$ ✓

Ejercicio 1: Calcular la derivada de las siguientes funciones:

c) $$\left(\frac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+3x+2)'(x^3+x^2+1) - (x^2+3x+2)(x^3+x^2+1)'}{(x^3+x^2+1)^2}$$
$$= \frac{(2x+3)(x^3+x^2+1) - (x^2+3x+2)(3x^2+2x)}{(x^3+x^2+1)^2} = \dots$$

k) $$\left(\sin\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right)\right)' = \cos\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right)\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right)'$$

Regla de la cadena

Cadena

$$= \cos\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right) e^{\frac{x+1}{x-2}} \left(\frac{(x+1)'(x-2) - (x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}\right)$$

Cociente

$$= \cos\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right) e^{\frac{x+1}{x-2}} \cdot \left(\frac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2}\right)$$

$x - 2 - x - 1$
-3

$$= \cos\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right) e^{\frac{x+1}{x-2}} \cdot \left(\frac{-3}{(x-2)^2}\right)$$

$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$