8.2 (1) Dar una aproximacion racional sin hallarla explicitamente

b_ el numero $\operatorname{sen}(2)$ con un error menor que 10^{-4}

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = P_n(\operatorname{sen}, 0)(x)$$

$$|\operatorname{sen}(x) - P_n(\operatorname{sen},0)(x)| = |R_n(\operatorname{sen},0)(x)|$$

$$|R_n(\operatorname{sen},0)(2)| < 10^{-4}$$

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(c_x)\, x^{n+1}}{(n+1)!} \right| < \frac{1}{10000} \qquad |f^{(n+1)}(c_x)| < 1$$

$$\frac{1\, x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{10000} \Rightarrow \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{10000}$$

$$10000 \; 2^{n+1} < (n+1)!$$

$$\frac{10000 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} < 1$$

$$\boxed{n = 10}$$

n	$\frac{10^4\, 2^{n+1}}{(n+1)!}$
5	$64 \cdot 10000 / 720$
6	$128 \cdot 10000 / 5040$
7	$256 \cdot 10000 / 40320$
8	$512 \cdot 10000 / 362880$
9	$1024 \cdot 10000 / 3628800$
10	$2048 \cdot 10000 / 39916800 \approx 0{,}51$

Segundo parcial 2do semestre 2023

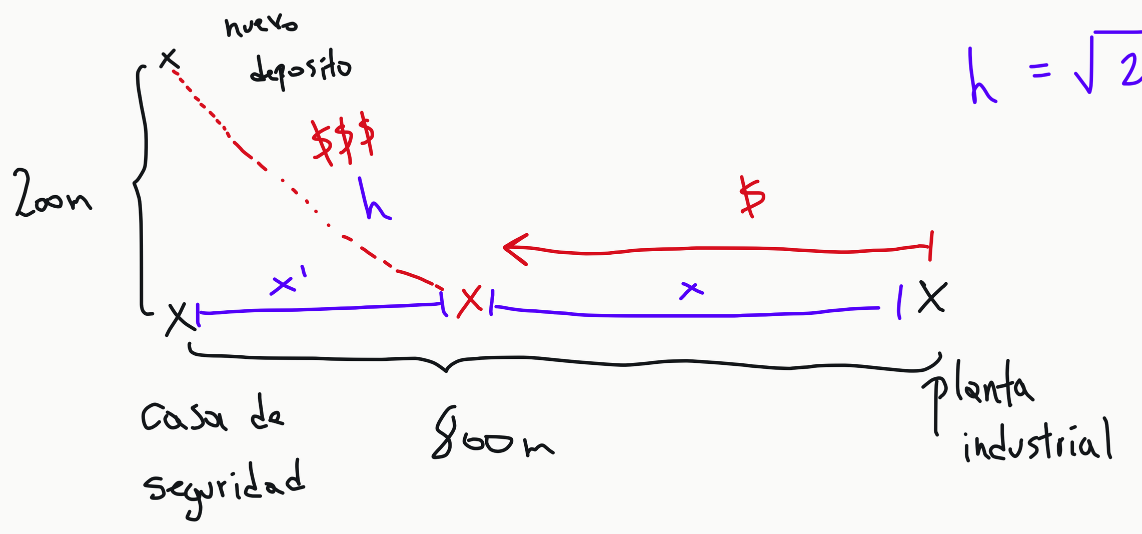
(9) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = x^2 - \int_0^{2x} e^{t^3}\, dt$

$$P_2(f,0) = \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{i}(0)}{i!} x^i = 0 - 2x + \frac{2x^2}{2!} = -2x + x^2$$

$$f'(x) = 2x - 2e^{(2x)^3} \qquad f(0) = 0 \qquad f'(0) = -2$$

$$f''(x) = 2 - 2 \cdot 3(2x)^2 e^{(2x)^3} \qquad f''(0) = 2$$

La empresa VIDC S.A. tiene sus instalaciones en un predio rural en Cerro Largo. Dentro de éste, la planta industrial se encuentra al final de un camino de tierra, a $800m$ de la caseta de seguridad, como se muestra en la figura. A $200m$ de este camino, justo frente a la caseta de seguridad se ha construido un nuevo depósito. Los camiones que llevan la producción de la planta al depósito deben circular, debido a su peso, por camino asfaltado. Por este motivo se va a asfaltar el camino de tierra desde la planta hasta el punto X, y de ahí se va a construir un camino asfaltado que va directo al depósito. Construir un tramo del nuevo camino cuesta el triple que asfaltar un tramo del camino existente de igual longitud. ¿A qué distancia debe estar X de la planta, si se quiere minimizar el costo de la obra?



$$h = \sqrt{200^2 + x'^2}$$

$$\text{costo} = 3\sqrt{200^2 + x'^2} + 800 - x' = c(x')$$

$$c'(x') = \frac{3 \cdot 2x'}{2\sqrt{200^2 + x'^2}} - 1 = 0$$

$$\frac{3x'}{\sqrt{200^2 + x'^2}} = 1 \Rightarrow 3x' = \sqrt{200^2 + x'^2}$$

$$9x'^2 = 200^2 + x'^2$$

$$8x'^2 = 200^2$$

$$x'^2 = \frac{200^2}{8}$$

$$x' = \sqrt{\frac{200^2}{8}}$$

$$x' = \frac{\sqrt{200^2}}{\sqrt{8}} = \frac{200}{\sqrt{4 \cdot 2}} = \frac{200}{\sqrt{4}\sqrt{2}} = \frac{200}{2\sqrt{2}} = \frac{100}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}$$

$$x = 800 - x' = 800 - 50\sqrt{2}$$