Invertibilidad de funciones

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4 = 4$

ⓐ Hallar el intervalo de longitud max, que contenga al 0 en el que se pueda def. la inversa (g) de f

$f'(x) = x^2 + x - 6$

$\frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

$+ + + \,|\, - - - - - - \,|\, + + +$; -3, 2 ; $\mathrm{Sig}(f'(x))$

$(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$ monotona creciente

$(-3, 2)$ monotona decreciente

el intervalo que contiene al 0 y es invertible es $(-3, 2)$

ⓑ Hallar $g'(4)$

$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$

$g'(4) = \frac{1}{f'(\underbrace{g(4)}_{=0})} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{-1}{6}$

Optimizacion en problemas geometricos

① b. Hallar el rectangulo de menor perimetro cuya area es 4

$p = b + b + h + h$

area $= bh$

$4 = bh$

$h = \frac{4}{b}$

$(x^{-1})' = -1x^{-2}$

$p(b) = 2b + 2 \cdot \frac{4}{b}$

$p'(b) = 2 + 8\left(\frac{-1}{b^2}\right) = 0 \Rightarrow 2 = \frac{1}{b^2} 8 \Rightarrow \boxed{b = 2}$

$h = 2$

mayor area cuyo perimetro es 8

$p = 8 = 2b + 2h$

$b = \frac{8 - 2h}{2}$

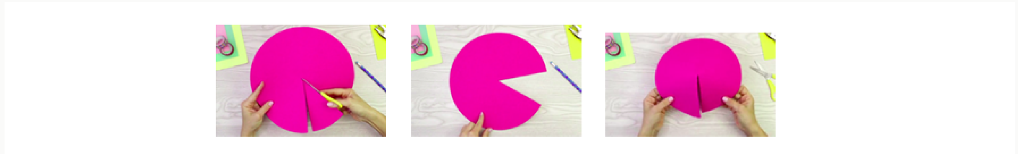
$b = 4 - h$

$A = bh \Rightarrow A(h) = h(4-h)$

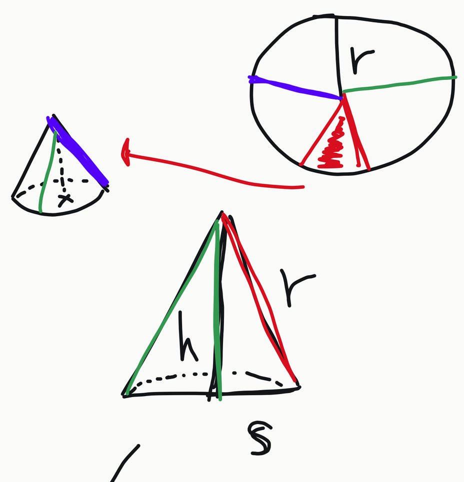
$A = 4h - h^2$

$A' = 4 - 2h = 0 \Rightarrow h = 2 \Rightarrow b = 2$

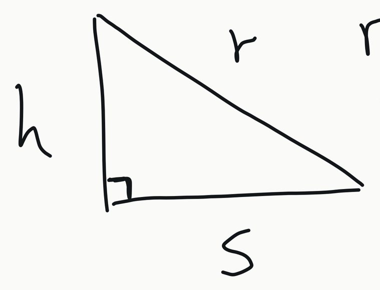
4.



4. (*) Calcular el cono de mayor volumen que se puede construir a partir de un círculo de radio r (Recordar que el volumen de un cono con altura h y base un círculo de radio s es $\pi s^2 h/3$).*Sugerencia: recordar cómo se hacen los gorros de cumpleaños.*



$V = \frac{\pi s^2 h}{3}$



$r^2 = h^2 + s^2$

$s = \sqrt{r^2 - h^2}$

$V(h) = \frac{\pi \left(\sqrt{r^2 - h^2}\right)^2 h}{3}$

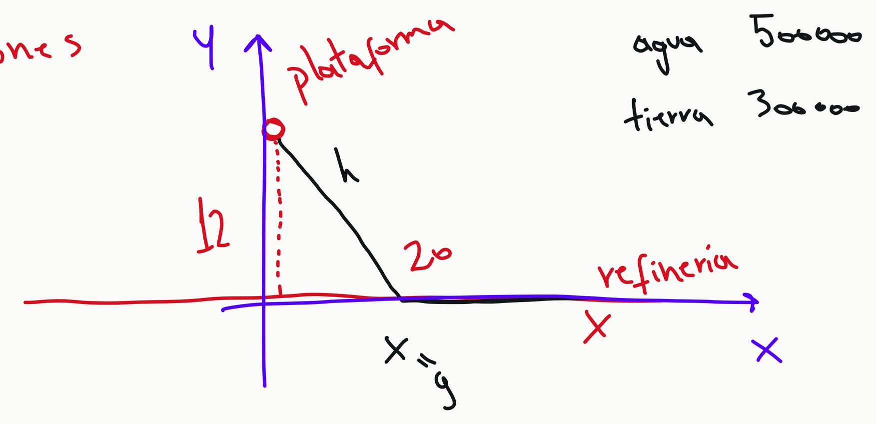
$V(h) = \frac{\pi}{3} \underbrace{(r^2 - h^2) h}_{hr^2 - h^3} \longrightarrow V'(h) = \frac{\pi}{3} \underbrace{(r^2 - 3h^2)}_{=0} = 0$

$3h^2 = r^2 \longrightarrow h = \frac{r}{\sqrt{3}}$

$s = \sqrt{r^2 - h^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{3}} = \sqrt{\frac{2r^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r$

Aplicaciones

19



agua 500000

tierra 300000

$C(x) = (20 - x)\, 300\,000 + 500\,000 \sqrt{x^2 + 12^2}$

$\partial/\partial x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 12^2}}$

$h^2 = x^2 + 12^2$

$C'(x) = -300\,000 + \frac{500\,000\, x}{\sqrt{x^2 + 12^2}} = 0$

$300\,000 = \frac{500\,000\, x}{\sqrt{x^2 + 12^2}} \longrightarrow 300\,000 \sqrt{x^2 + 12^2} = 500\,000\, x$

$\sqrt{x^2 + 12^2} = \frac{5}{3} x$

$x^2 + 12^2 = \left(\frac{5x}{3}\right)^2$

$x^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 x^2 + 12^2 = 0 \longrightarrow x = \begin{cases} 9 \\ -9 \end{cases}$

$\boxed{x = 9}$