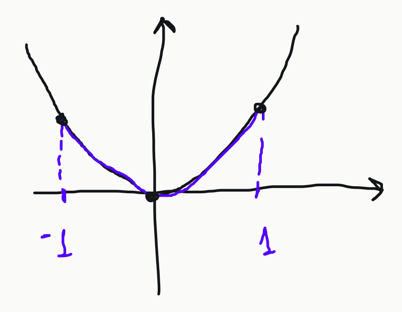
Teo. de Weierstrass

Si una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ entonces f alcanza sus extremos absolutos, es decir, existen dos puntos $x_1, x_2 \in [a,b]$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\ \forall x \in [a,b]$

1. Determinar cotas, máximo y mínimo si tiene

(a) $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

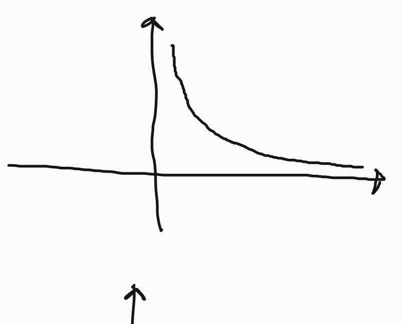
$\sup = 1$ $\quad$ $\inf = 0 = \min$



(c) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$

no está acotado superiormente

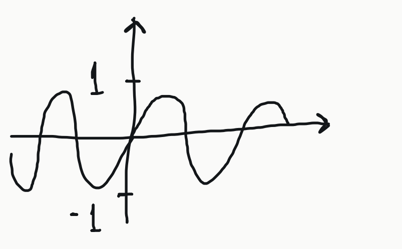
$\inf = 0$



(e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sen}(x)$

$\sup = 1 = \max$

$\inf = -1 = \min$



5\. 5. (*) En este ejercicio se trabajará con el problema de la existencia de extremos de funciones continuas con dominio $\mathbb{R}$ (donde no podemos aplicar el teorema de Weierstrass).

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Probar o dar un contraejemplo de las siguientes afirmaciones

a) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, entonces f tiene máximo y mínimo.

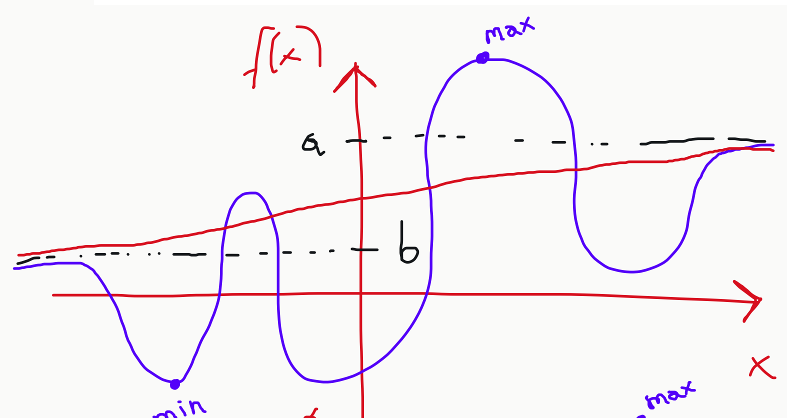
b) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, entonces f tiene máximo o mínimo.

c) Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, entonces f tiene máximo y mínimo.

d) Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, entonces f tiene máximo o mínimo.

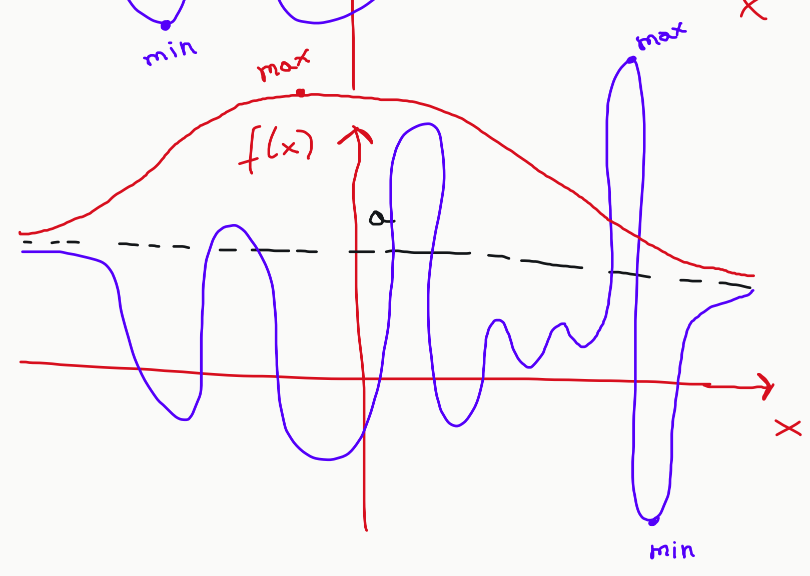
e) Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, entonces f tiene máximo.

f) Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, entonces f tiene máximo.



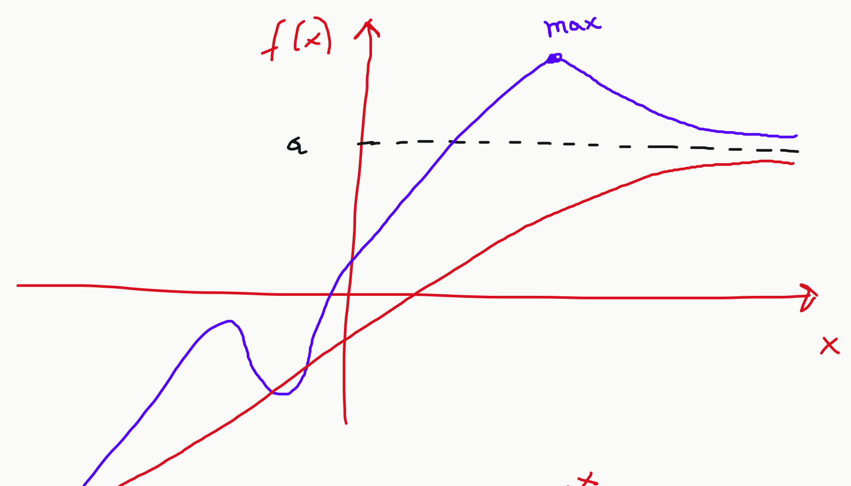
a - (F)

b - (F)

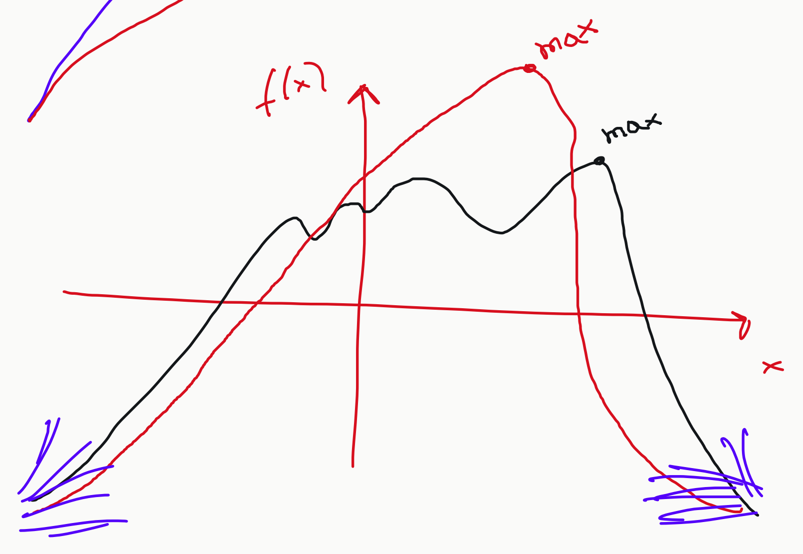


c - (F)

d - (V)



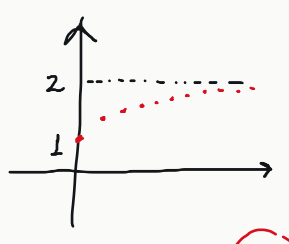
e - (F)



f - (V)

Primer parcial 2023 segundo semestre

(1) $A = \left\{ \frac{2^{n+1}-1}{2^n} : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\}$



$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 . 2^n - 1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 . 2^n}{2^n} = 2$$

$\sup = 2$ (C)

$\inf = 1 = \min$

$$\frac{2^{0+1}-1}{2^0} = \frac{2-1}{1} = 1 \quad ; \quad \frac{2^{1+1}-1}{2^1} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

(2) $f(x) = x^2 - 1$

$P = \{-1, 0, 1, 2\}$

$S_*(f, P) = \underbrace{1 . (-1) + 1 . (-1) + 1 . 0}_{} = -2$ (A)

$1(-1-1+0)$

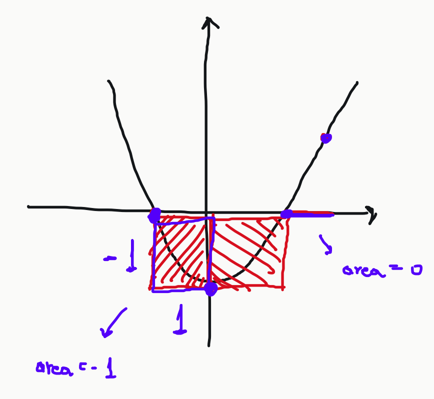
$= \frac{b-a}{n}$ ←

$f(-1) = 0$

$f(0) = -1$

$f(1) = 0$

$f(2) = 3$



(3) $\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$ $\quad$ $\int_2^4 g(x)\,dx = \frac{3}{2}$ $\to$ $\int_2^4 (5f(x) - g(x))\,dx$

$$5\int_2^4 f(x)\,dx - \int_2^4 g(x)\,dx = 5\left(\frac{1}{2} - 3\right) - \frac{3}{2} = 5\left(-\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2} = \frac{-28}{2} = -14$$

(A)

$$\int_{a\,0}^{b\,4} f(x)\,dx = \int_{a\,0}^{c\,2} f(x)\,dx + \int_{c\,2}^{b\,4} f(x)\,dx \quad \text{con} \quad c \in (a,b)$$

$$\Rightarrow \int_2^4 f(x)\,dx = \int_0^4 f(x)\,dx - \int_0^2 f(x)\,dx$$

(4) $\lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to 0} \underbrace{\text{sen}(1-x)}_{\text{acotado}} + \frac{x^2-1}{x-1} - (x-3)$

$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

(primer término) $\to 0$

$\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} - x + 3 = \lim_{x\to\infty} x + 1 - x + 3 = 4$$

(D)

(5) $f(x) = \begin{cases} (x-1)\,\text{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \in [1,2] \\ \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} \overbrace{(x-1)}^{\to 0}\ \overbrace{\text{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)}^{\text{acotado}} = 0$ ($\to 0$)

$\lim_{x\to 1^+} ax + b = a + b$

$\Big\}\ a + b = 0$

$\lim_{x\to 2^-} ax + b = 2a + b$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = 4$

$\Big\}\ 2a + b = 4$

$\begin{cases} a + b = 0 \to a = -b \\ 2a + b = 4 \end{cases}$

$2a - a = 4$

$\boxed{a = 4}$

$\boxed{b = -4}$ (B)

ejercicio $\varepsilon = 10^{-10}$ $\quad$ $f(x) = x^2$ $\quad$ $a = 0$

$L = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$

$f(0 + \delta) = 0 + \varepsilon$

$(0+\delta)^2 = 0 + \varepsilon$

$\delta^2 = \varepsilon \to \delta = \pm\sqrt{\varepsilon}$

$\Rightarrow \boxed{\delta = \sqrt{\varepsilon}}$