3. (*) Se estudian las siguientes variaciones de la definición de límite.

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $p\in\mathbb{R}$, el límite de f cuando x tiende a p es L si:

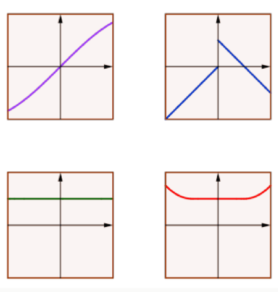
a) (Definición de límite)
$\forall \epsilon>0, \exists \delta>0$: tal que para todo $x\in\mathbb{R}$ con $0<|x-p|\le\delta$ se tiene que $|f(x)-L|\le\epsilon$.

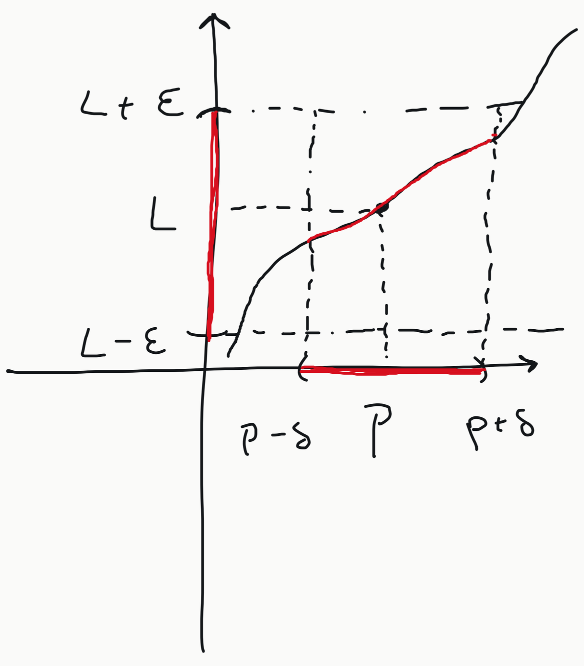
b) $\exists \epsilon>0$ y $\exists\delta>0$ tal que para todo $x\in\mathbb{R}$ con $0<|x-p|\le\delta$ se tiene que $|f(x)-L|\le\epsilon$.

c) $\exists\epsilon>0$ tal que $\forall\delta>0$ y para todo $x\in\mathbb{R}$ con $0<|x-p|\le\delta$ se tiene que $|f(x)-L|\le\epsilon$.

d) $\forall\epsilon>0$, $\forall\delta>0$ y para todo $x\in\mathbb{R}$ con $0<|x-p|\le\delta$ se tiene que $|f(x)-L|\le\epsilon$.

Determinar las implicancias entre ellas. Determinar para los gráficos de la imagen cuáles verifican qué variante de definición cuando $p=0$.





def.

gráfica	1	2	3	4
a	✓	×	✓	✓
b	✓	✓	✓	✓
c	×	×	✓	✓
d	×	×	✓	×

5. $\lim_{x\to a} f(x)$

ⓐ $a=3$; $\lim_{x\to 3} \frac{2f(x)}{x} = 1$ $\quad \lim_{x\to 3} f(x) = ?$

$$\downarrow$$

$$\frac{2\lim_{x\to 3} f(x)}{\lim_{x\to 3} x} = 1 \to \lim_{x\to 3} f(x) = \frac{\lim_{x\to 3} x}{2} = \frac{3}{2}$$

ⓔ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-5}{e^x-1} = 3$; $a=0$ $\quad \lim_{x\to 0} f(x) = ?$

$$\frac{\lim_{x\to 0} f(x) - 5}{\lim_{x\to 0} e^x - 1} = 3 \to \lim_{x\to 0} f(x) = 3\underbrace{\lim_{x\to 0} e^x}_{1} - 3 + 5 = 5$$

ⓖ $\lim_{x\to 2} \frac{f(x^3)-1}{x} = 1$, $a=8$ $\quad \lim_{y\to 8} f(y) = ?$

$$\frac{\lim_{x\to 2} f(x^3) - 1}{\lim_{x\to 2} x} = 1 \to \lim_{x\to 2} f(x^3) = \lim_{x\to 2} x + 1 = 3$$

Cambio de variable $y = x^3$

$$\lim_{y\to 8} f(y) = 3$$

Cálculo de límites

1. ⓐ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x+2}{x^2+4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

ⓖ $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = -2$

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

	1	-3	2
1		1	-2
	1	-2	0

ⓘ $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$

$x-1 = (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$

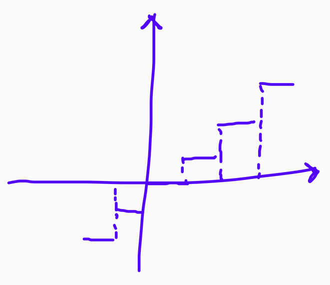
$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

$\nexists \lim_{x\to 0} \lfloor x \rfloor \qquad \lim_{x\to 0^+} \lfloor x \rfloor \neq \lim_{x\to 0^-} \lfloor x \rfloor$

$\lim_{x\to 0^+} \lfloor x \rfloor = 0$

$\lim_{x\to 0^-} \lfloor x \rfloor = -1$



5. ⓐ $\lim_{x\to 0} \underbrace{x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{acotada}} = \underbrace{\lim_{x\to 0} x}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{1 \ge \operatorname{sen}(t) \ge -1} = 0$

ⓑ $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = x$

ⓒ $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(-1)(-\cos(x)+1)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\overbrace{(1-\cos(x))}^{\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2x} = 0$

$\lim_{x\to 0} 1-\cos(x) = \frac{x^2}{2}$