Practica 2

Axioma de completitud: cada conjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene una cota superior mínima (supremo)

α supremo de A
- α es cota superior de A
- $\forall \delta > 0 \ \exists \ a \in A / a \in (\alpha - \delta, \alpha)$

4. Consecuencias básicas de la definición de supremo

(a) Probar que el axioma de completitud es equivalente a la siguiente propiedad "todo conjunto no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo"

($\longrightarrow$) sea S un conjunto no vacío acotado inferiormente

consideremos L el conjunto de las cotas inferiores de S

$L = \{ l \in \mathbb{R} : l \leq s \ \forall s \in S \}$

L es no vacío y está acotado superiormente por cualquier $s \in S$

Por axioma de completitud L tien supremo

$\left.\begin{array}{l} \cdot \ \sup(L) \text{ menor de las cotas superiores de } L \\ \cdot \text{ cota inferior de } S \end{array}\right\} \sup(L) = \inf(S)$

($\longleftarrow$) S acotado superiormente $\Rightarrow -S = \{ -s : s \in S \}$ acotado inferiormente

$\exists \inf(-S)$ mayor de las cotas inferiores

$\Rightarrow -\inf(-S)$ menor de las cotas superiores de S

$\boxed{\left.\begin{array}{l} \text{si } \exists M / M < -\inf(-S) \\ M \text{ cota superior de } S \end{array}\right\} -M \text{ cota inferior de } -S}$

contradice que $\inf(-S)$ mayor de las cotas inferiores $\Rightarrow -\inf(-S) = \sup(S)$

(b) Sea A un conjunto no vacío, acotado superiormente y $\alpha = \sup(A)$. Probar que $\forall \delta > 0 \ \exists \ a_\delta \in A \setminus \alpha - \delta < a_\delta \leq \alpha$

Por la definición de supremo sabemos que α es la mínima cota superior de A: $\alpha \geq a \quad \forall a \in A$

Para $\epsilon > 0 \ \exists \ a_\epsilon \in A / \alpha - \epsilon < a_\epsilon$

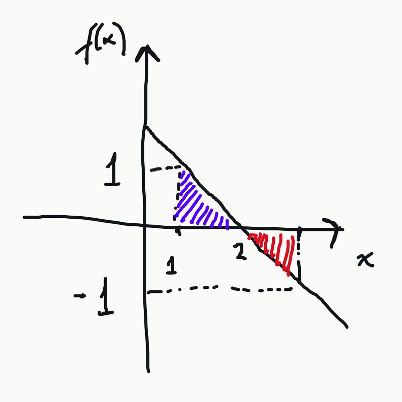
si tomo $\delta = \epsilon \Rightarrow \boxed{\alpha - \delta < a_\delta \leq \alpha}$

Capítulo 3

1_ Calcular la integral en el intervalo $[1,3]$

(a) $f(x) = 2 - x$

$\int_1^3 f(x)dx = 0$

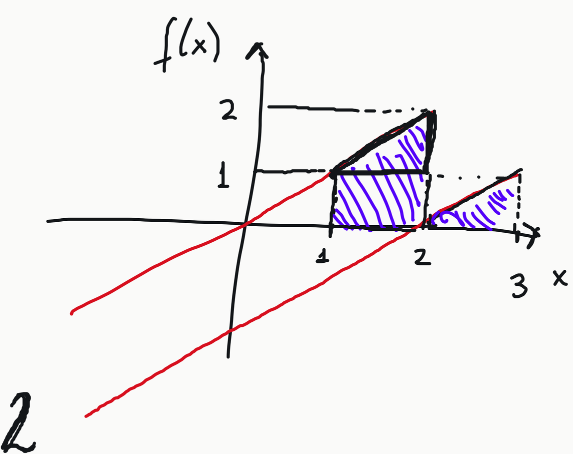


$\frac{b \times h}{2} = \frac{(3-2)(-1)}{2} = -\frac{1}{2}$

$\underbrace{\int_1^2 f(x)dx}_{} + \int_2^3 f(x)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$\frac{b \times h}{2} = \frac{(2-1)1}{2} = \frac{1}{2}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x-2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

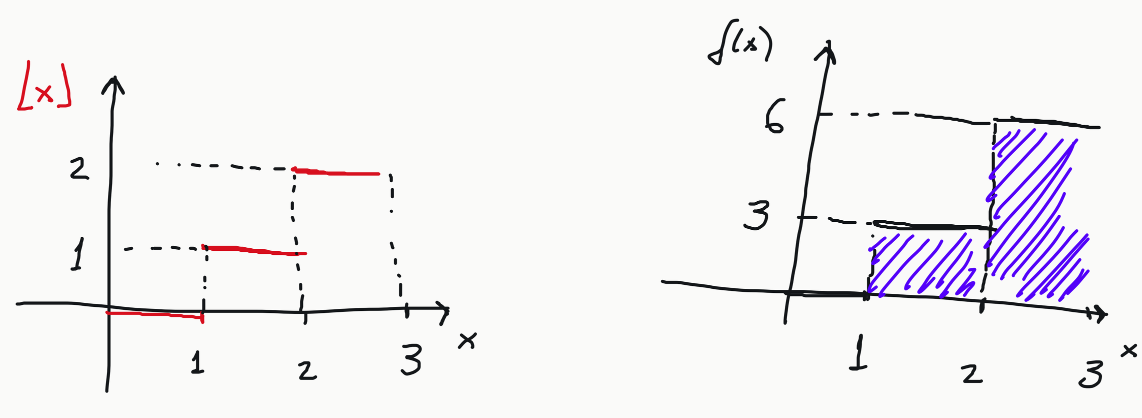


$\int_1^2 f(x)dx =$ cuadrado + triangulo

$\underset{(2-1)1}{b \times h} \qquad \frac{b \times h}{2} \quad \frac{(2-1).(2-1)}{2}$

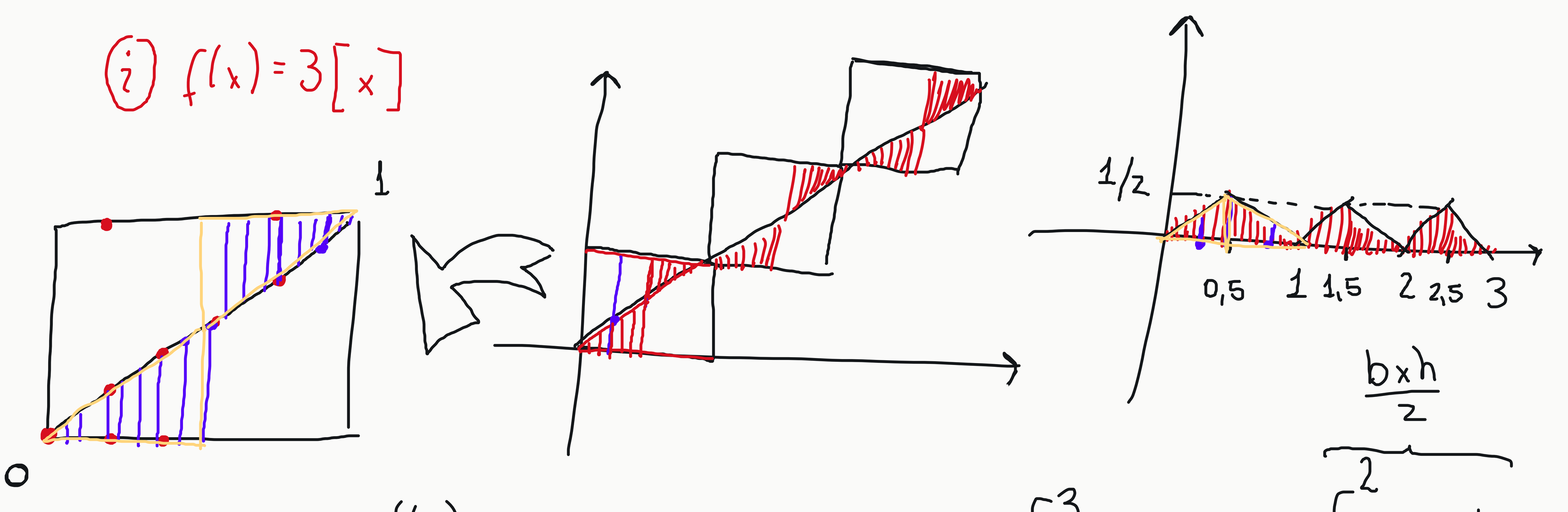
$\int_1^3 f(x)dx = \underbrace{\int_1^2 f(x)dx}_{1 + \frac{1}{2}} + \underbrace{\int_2^3 f(x)dx}_{\frac{1}{2}} = 2$

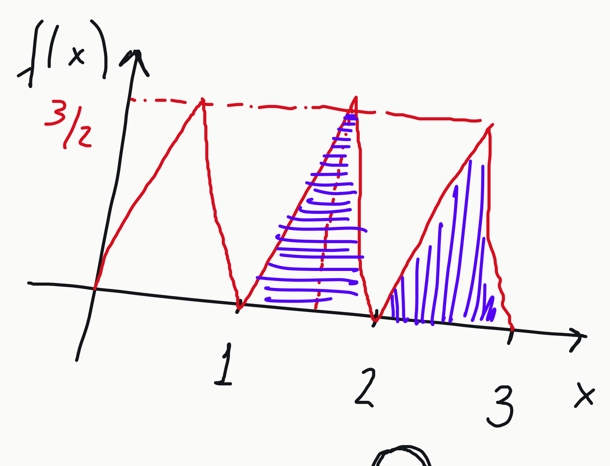
(f) $f(x) = 3\lfloor x \rfloor$



$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = (2-1)3 + (3-2)6 = 9$

(i) $f(x) = 3[x]$





$\int_1^3 f(x)dx = 2 \int_1^2 f(x)dx = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}$

$\frac{b \times h}{2}$

$\frac{(2-1)\frac{3}{2}}{2}$

5. Bosquejar $F(x) = \int_0^x f(t)dt$