Práctico 1

1. Primeramente realizar un estudio cualitativo de las soluciones (sin hallarlas). Intentar dibujar un campo de pendientes, estudiar concavidad, puntos de equilibrio, simetrías.

   Luego resolver y graficar las soluciones. Identificar intervalos maximales de definición para cada una. Dibujar diagramas de fase en $\mathbb{R}$.

   a) $\dot{x} = 1/x$.
   b) $\dot{x} = x^2$.
   c) $\dot{x} = x^2 - 1$.
   d) $\dot{x} = x^{1/3}$.

2. Resolver las siguientes ecuaciones e intentar graficar. ¿En qué se diferencian los gráficos de este ejercicio con el anterior? ¿Por qué?

   a) $\dot{x} = tx^{1/2}$.
   b) $(1 + e^t)x\dot{x} = e^t$.
   c) $(t - 4)x^4 - t^3(x^2 - 3)\dot{x} = 0$

3. Resolver y graficar (las) soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones.

   a) $\dot{x} - 3x = e^t$.
   b) $\dot{x} - 2xt = t$.
   c) $\dot{x} + x\cos(t) = \cos(t)\,\mathrm{sen}(t)$.
   d) $\dot{x} - \frac{2}{t}x = t^4$.

4. Hallar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones. ¿En qué se relacionan las soluciones halladas? Escribir y probar una regla general para este tipo de situaciones.

   a) $\dot{x} - 3x = e^{2t}$ con $x(0) = 0$.
   b) $\dot{x} - 3x = \cos(t)$ con $x(0) = 0$.
   c) $\dot{x} - 3x = e^{2t} + \cos(t)$ con $x(0) = 0$.

5. Sea la ecuación diferencial lineal $\dot{x} = p(t) + q(t)x$. Supongamos que ϕ_1 y ϕ_2 son dos soluciones distintas. Demostrar que toda otra solución se escribe $\phi = \phi_1 + C(\phi_2 - \phi_1)$, donde C es una constante.

6. La ecuación
$$\dot{x} + P(t)x = Q(t)x^n,$$
   que se conoce como ecuación de Bernoulli, es lineal para $n = 0$ y $n = 1$. Probar que utilizando el cambio de variable $z = x^{1-n}$ se puede reducir a una ecuación lineal, cualquiera sea n, y aplicar este método para resolver las siguientes ecuaciones:

   a) $t\dot{x} + x = t^4x^3$.
   b) $tx^2\dot{x} + x^3 = t\cos t$.
   c) $t\dot{x} + x = tx^2$.
   d) $-2\dot{x} = tx^3 + x$ con $x(1) = 0$.
   e) $-2\dot{x} = tx^3 + x$ con $x(1) = -1$.

7. Una extensión natural de la ecuación diferencial lineal de primer orden $\dot{x} = p(t) + q(t)x$ es la ecuación de Riccati
$$\dot{x} = p(t) + q(t)x + r(t)x^2.$$
En general, esta ecuación no se puede resolver por métodos elementales. No obstante, si se conoce una solución particular $x_1(t)$, la solución general tiene la forma
$$x(t) = x_1(t) + z(t)$$
donde $z(t)$ es la solución general de la ecuación de Bernoulli
$$z' - (q + 2rx_1)z = rz^2.$$
   a) Demostrar esto último.
   b) Hallar la solución general de la ecuación $\dot{x} = \frac{x}{t} + t^3x^2 - t^5$, sabiendo que tiene $x_1(t) = t$ como solución particular
   c) Resolver la ecuación $\dot{x} = x^2 - 2x - t^4 + 2t + 1$ sabiendo que admite una solución polinomial.

8. Considerar el sistema físico formado por una partícula sujeta a un resorte ideal con constante elástica $k > 0$ que se mueve a lo largo de una recta. Si x_0 indica la posición de reposo, la fuerza que ejerce el resorte sobre la partícula (cuya posición escribimos como x) queda determinada por la siguiente ecuación:
$$F = -k(x - x_0)$$
La ley que determina el movimiento de la partícula es la segunda Ley de Newton. Escribirla y resolverla. Reescribir la ecuación como un sistema añadiendo la variable velocidad $v = \dot{x}$. Dibujar diagrama de fase.

   Ahora consideremos una fuerza externa que amortigue la partícula. Modelamos esta fuerza externa proporcional a la velocidad y específicamente asumimos que la fuerza neta sobre la partícula es de la forma
$$F = -k(x - x_0) - a\dot{x}$$
Donde $a > 0$. Buscar soluciones y distinguir los posibles comportamientos en función de los valores k y a. Dibujar y comparar diagramas de fase.

9. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:
   a) $\ddot{x} + 3\dot{x} - 10x = 6e^{4t}$.
   b) $\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 20e^{-2t}$.
   c) $\ddot{x} + \dot{x} = 10t^4$.
   d) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 3$.

10. Hallar $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ para que $x(t) = e^{2t}\cos t$ sea solución de la ecuación diferencial $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$. Hallar la solución de la ecuación que verifica $x(0) = 1$; $\dot{x}(0) = 1$.

11. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que las ecuaciones diferenciales $\ddot{x}+a\dot{x}-2x = 0$ y $\ddot{x}-2\dot{x}+ax = 0$ tengan soluciones en común además de $x(t) = 0$. Resolver las ecuaciones obtenidas.

12. Resolver con las condiciones iniciales que se indican:

a) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \cos(2t)$ con $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$.

b) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \operatorname{sen}(2t)$ con $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$.

c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = [\cos(2t) + \operatorname{sen}(2t)]/2$ con $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$. Justificar con cuidado.

d) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t)$ con $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$. Justificar con cuidado.

13. Decir todo lo que se pueda acerca de las soluciones de las siguientes ecuaciones sin hacer ningún cálculo:

    a) $\dot{x} = \sin x$;

    b) $\dot{x} = e^{x^2}$.

14. La ecuación diferencial autónoma

$$\dot{x} = ax - bx^2,$$

donde a y b son dos constantes positivas, es un modelo que describe la evolución del número de individuos de una población que se reproduce en su ambiente, sin sufrir la influencia de depredadores ni la acción del hombre. Se decide explotar comercialmente esta población, extrayendo ejemplares a un ritmo constante de c individuos por unidad de tiempo. La ecuación que gobierna el crecimiento de la población en estas condiciones pasa a ser, mientras x es positivo,

$$\dot{x} = ax - bx^2 - c.$$

Si en algún instante la solución $x(t)$ alcanza el valor 0 este hecho debe interpretarse como la extinción de la población.

a) Mostrar que existe un valor umbral de c, al que llamaremos c_* tal que si $c > c_*$ entonces la explotación siempre conduce a la extinción de la población en un tiempo finito. Calcular c_*.

b) Mostrar que si $0 < c < c_*$ existe un valor x_* tal que si la cantidad x_0 de individuos en el instante en que empieza la explotación es menor que x_* entonces la población también se extingue en tiempo finito. Calcular el valor de x_* y explicar cuál es la predicción de nuestro modelo para el caso en que $x_0 > x_*$.

c) Mostrar que si la cantidad inicial x_0 es suficientemente alta entonce pueden extraerse a ritmo c_* sin provocar la extinción de la población. En estas condiciones y suponiendo que nuestro modelo es correcto, ¿qué debería observarse a largo plazo?