- **Escriba cédula y nombre en cada hoja.**
- **Numere cada una de las hojas.**
- **Escriba en un solo lado de la hoja.**
- **Empiece cada ejercicio en una nueva hoja.**
- **Indique el total de hojas entregadas en la primera.**

Ejercicio 1 (12 puntos)

Resuelva el siguiente problema de Programación Lineal mediante el algoritmo de Simplex Revisado.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 + 2x_2 - x_3 \\
s.a. \quad & \\
& -x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Comenzamos por escribir el problema en forma estándar, agregando variables de holgura:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 - 2x_2 + x_3 \\
s.a. \quad & \\
& -x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 5 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Las variables de holgura brindan una solución básica factible inicial: $x_B = (x_4, x_5, x_6)$. La matriz básica correspondiente (formada por las columnas de las variables básicas) y su inversa están dadas por $B = B^{-1} = I$.

Luego, calculamos los valores iniciales de:

- Los multiplicadores simplex: $\pi^T = c_B^T B^{-1} = (0,0,0)$
- El lado derecho transformado: $\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
- El valor objetivo: $\bar{z} = c_B^T B^{-1} b = 0$

<u>Iteración 1:</u>

Calculamos los costos reducidos para las variables no básicas:

$$
\begin{aligned}
\overline{c_1} &= c_1 - \pi^T a_1 = -1 - (0,0,0)(-1,2,1)^T = -1 \\
\overline{c_2} &= c_2 - \pi^T a_2 = -2 - (0,0,0)(4,2,1)^T = -2 \\
\overline{c_3} &= c_3 - \pi^T a_3 = 1 - (0,0,0)(-1,-1,2)^T = 1
\end{aligned}
$$

Ya que hay más de un costo reducido negativo, podemos tomar cualquiera de estas variables para entrar a la base. Elegimos la variable no básica x_2.

La columna correspondiente a x_2 expresada en la base actual es $\overline{a_2} = B^{-1}a_2 = (4,2,1)^T$ y el tableau de Simplex Revisado nos queda de la siguiente manera:

4	5	1	0	0
2	5	0	1	0
1	6	0	0	1
-2	0	0	0	0

La variable saliente es x_4 y el tableau luego del pivoteo queda:

1	5/4	1/4	0	0
0	5/2	-1/2	1	0
0	19/4	-1/4	0	1
0	5/2	1/2	0	0

La nueva variable básica es $x_B = (x_2, x_5, x_6)$ con un valor objetivo $z = -5/2$.

__Iteración 2:__

Calculamos los costos reducidos para las variables no básicas:

$$\overline{c_1} = c_1 - \pi^T a_1 = -1 - (-1/2,0,0)(-1,2,1)^T = -3/2$$
$$\overline{c_3} = c_3 - \pi^T a_3 = 1 - (-1/2,0,0)(-1,-1,2)^T = 1/2$$
$$\overline{c_4} = c_4 - \pi^T a_4 = 0 - (-1/2,0,0)(1,0,0)^T = 1/2$$

Ingresa la variable no básica x_1 a la base.

La columna correspondiente a x_1 expresada en la base actual es $\overline{a_1} = B^{-1}a_1 = (-1/4,5/2,5/4)^T$ y el tableau de Simplex Revisado nos queda de la siguiente manera:

-1/4	5/4	1/4	0	0
5/2	5/2	-1/2	1	0
5/4	19/4	-1/4	0	1
-3/2	5/2	1/2	0	0

La variable saliente es x_5 y el tableau luego del pivoteo queda:

0	3/2	1/5	1/10	0
1	1	-1/5	2/5	0
0	7/2	0	-1/2	1
0	4	1/5	3/5	0

La nueva variable básica es $x_B = (x_2, x_1, x_6)$ con un valor objetivo $z = -4$.

__Iteración 3:__

Calculamos los costos reducidos para las variables no básicas:

$$\overline{c_3} = c_3 - \pi^T a_3 = 1 - (-1/5,-3/5,0)(-1,-1,2)^T = 1/5$$
$$\overline{c_4} = c_4 - \pi^T a_4 = 0 - (-1/5,-3/5,0)(1,0,0)^T = 1/5$$
$$\overline{c_5} = c_5 - \pi^T a_5 = 0 - (-1/5,-3/5,0)(0,1,0)^T = 3/5$$

Ninguna de las variables no básicas tiene costo reducido negativo, por lo tanto la solución actual es óptima.

Por lo tanto la solución óptima del problema original es $x_1 = 1, x_2 = 3/2, x_3 = 0$ y el valor óptimo es $z = 4$.

Ejercicio 2 (10 puntos)

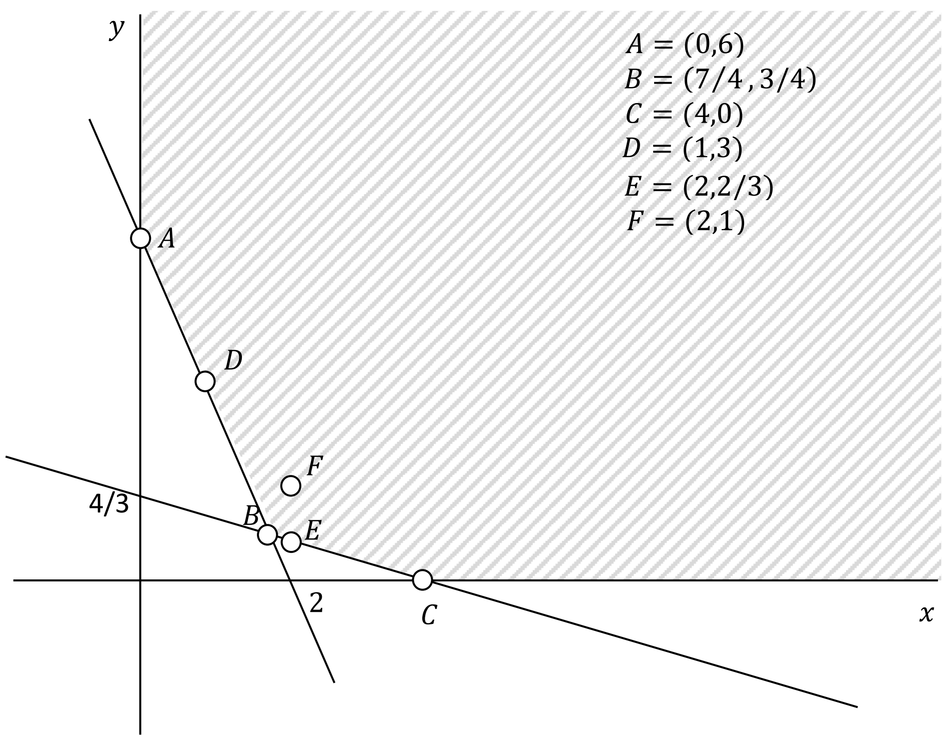
Solucionar el siguiente problema de Programación Entera con el método *Branch & Bound*. Dibujar la región factible, solucionar los subproblemas lineales en forma gráfica y dibujar el árbol que se genera.

$$
\begin{array}{ll}
\min & z = x + y \\
s.a. & \\
 & x + 3y \geq 4 \\
 & 3x + y \geq 6 \\
 & x, y \geq 0 \text{ y enteras}
\end{array}
$$

Comenzamos por escribir el problema de programación lineal $P0_L$ que se obtiene de relajar el problema entero original $P0$, quitando la restricción de integridad sobre las variables.

$$
P0_L \left\{
\begin{array}{ll}
\min & z = x + y \\
s.a. & \\
 & x + 3y \geq 4 \\
 & 3x + y \geq 6 \\
 & x, y \geq 0
\end{array}
\right.
$$

Dibujamos la región factible del problema:



De la región factible correspondiente a $P0_L$, tenemos que la solución óptima se da en el punto $B = \left(\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)$ con valor óptimo $z = \frac{5}{2}$. Cómo la solución óptima no es entera, ramificamos en una de las variables continuas. Ramificamos en $x \leq 1$ y $x \geq 2$, obteniendo los subproblemas $P1$ y $P2$ siguientes:

$$P1 \begin{cases} \min & z = x + y \\ s.a. & \\ & x + 3y \geq 4 \\ & 3x + y \geq 6 \\ & x \leq 1 \\ & x, y \geq 0 \ \ enteras \end{cases} \qquad P2 \begin{cases} \min & z = x + y \\ s.a. & \\ & x + 3y \geq 4 \\ & 3x + y \geq 6 \\ & x \geq 2 \\ & x, y \geq 0 \ \ enteras \end{cases}$$

1. Si relajamos $P1$ obtenemos un problema de programación lineal $P1_L$ que tiene solución óptima en el punto $D = (1,3)$ con $z = 4$. La solución es entera y por lo tanto solución óptima de $P1$ y el problema está vacío.

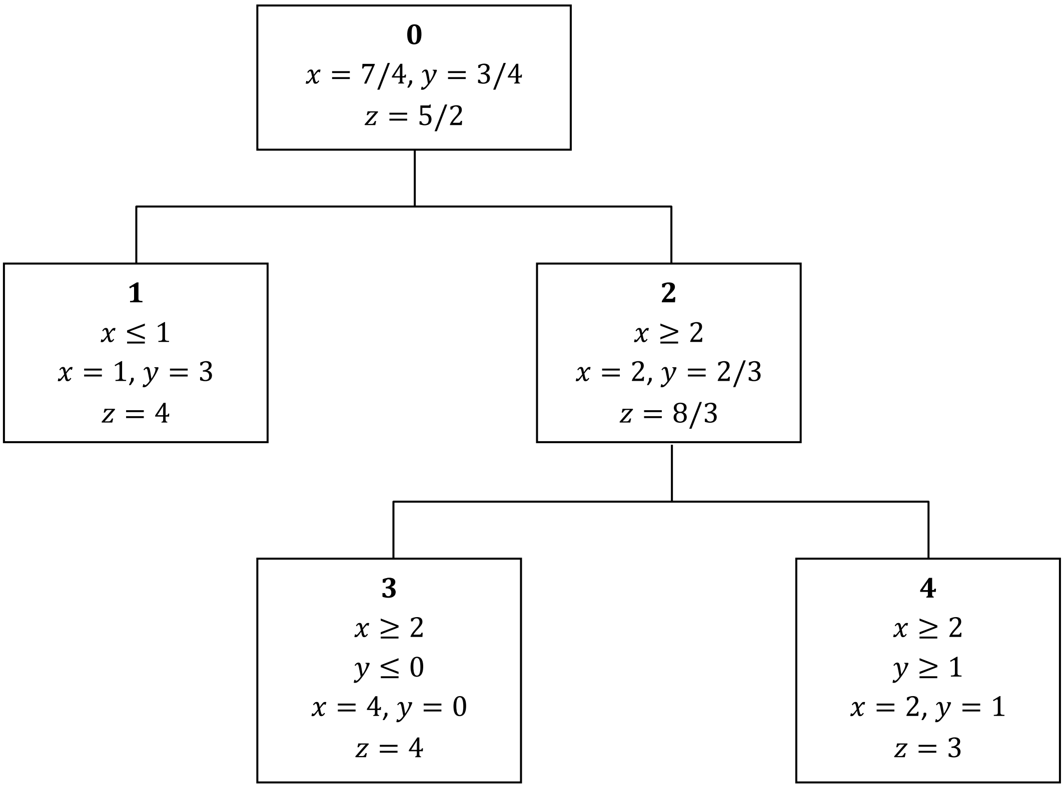
2. Si relajamos $P2$ obtenemos un problema de programación lineal $P2_L$ que tiene solución óptima en el punto $E = (2,2/3)$ con $z = 8/3$. Cómo la solución óptima no es entera, ramificamos en $y \leq 0$ y $y \geq 1$, obteniendo los subproblemas $P2.1$ y $P2.2$ siguientes:

$$P2.1 \begin{cases} \min & z = x + y \\ s.a. & \\ & x + 3y \geq 4 \\ & 3x + y \geq 6 \\ & x \geq 2 \\ & y \leq 0 \\ & x, y \geq 0 \ \ enteras \end{cases} \qquad P2.2 \begin{cases} \min & z = x + y \\ s.a. & \\ & x + 3y \geq 4 \\ & 3x + y \geq 6 \\ & x \geq 2 \\ & y \geq 1 \\ & x, y \geq 0 \ \ enteras \end{cases}$$

   1. Si relajamos $P2.1$ obtenemos un problema de programación lineal $P2.1_L$ que tiene solución óptima en el punto $C = (4,0)$ con $z = 4$. La solución es entera y por lo tanto solución óptima de $P2.1$ y el problema está vacío.

   2. Si relajamos $P2.2$ obtenemos un problema de programación lineal $P2.2_L$ que tiene solución óptima en el punto $F = (2,1)$ con $z = 3$. La solución es entera y por lo tanto solución óptima de $P2.2$ y el problema está vacío.

Todos los problemas generados están vacíos y por lo tanto el problema original solucionado. La solución óptima es $x = 2$, $y = 1$ con valor óptimo $z = 3$. El árbol de búsqueda generado es el siguiente:



0
$x = 7/4, y = 3/4$
$z = 5/2$
1
$x \le 1$
$x = 1, y = 3$
$z = 4$
2
$x \ge 2$
$x = 2, y = 2/3$
$z = 8/3$
3
$x \ge 2$
$y \le 0$
$x = 4, y = 0$
$z = 4$
4
$x \ge 2$
$y \ge 1$
$x = 2, y = 1$
$z = 3$

Ejercicio 3 (8 puntos)

Clasificar cada uno de los siguientes problemas según se trate de Programación Lineal (PL), Programación Lineal Entera (PLE) o Programación No Lineal (PNL). Justifique su respuesta.

a. $\min \quad z = xy + 2y$

$s.a.$

$$3x + y \leq 5$$
$$2x + y \leq 16$$
$$x, y \geq 0$$

b. $\min \quad z = x + (\log(10))y$

$s.a.$

$$3x + y \leq 5$$
$$2x + 4y \leq 16$$
$$x, y \geq 0$$

c. $\min \quad z = x + 2y$

$s.a.$

$$3x + y \leq 5$$
$$2x + 4y \leq 16$$
$$x, y \geq 0$$
$$y \ entera$$

d. $\min \quad z = x^2 + 2y$

$s.a.$

$$3x + y \leq 5$$
$$2x + 4y \leq 16$$
$$x \in \{0,1\}$$
$$y \geq 0$$

---

a. $\min \quad z = xy + 2y$

$s.a.$

$$3x + y \leq 5$$
$$2x + y \leq 16$$
$$x, y \geq 0$$

PNL debido a que la función objetivo es una función no lineal.

b. $\min \quad z = x + (\log(10))y$

$s.a.$

$$3x + y \leq 5$$
$$2x + 4y \leq 16$$
$$x, y \geq 0$$

PL debido a que la función objetivo y todas las restricciones son funciones lineales, y las variables números reales.

c. $\min \quad z = x + 2y$

$s.a.$

$$3x + y \leq 5$$
$$2x + 4y \leq 16$$
$$x, y \geq 0$$
$$y \; entera$$

PLE debido a que una de las variables debe ser entera y además la función objetivo y todas las restricciones son funciones lineales.

d. $\min \quad z = x^2 + 2y$

$s.a.$

$$3x + y \leq 5$$
$$2x + 4y \leq 16$$
$$x \in \{0,1\}$$
$$y \geq 0$$

PNL debido a que la función objetivo es una función no lineal.