Práctico 3 – Matrices invertibles y rango

1. Matrices invertibles

1. Determinar si las siguientes matrices son invertibles, y en caso de serlo calcular la inversa de la matriz.

$$a)\ \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 0,4 & -1,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$e)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad g)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Las siguientes matrices son invertibles:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcular las inversas.

   b) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando los cálculos de la parte anterior:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Hallar la inversa de las siguientes matrices, donde k y k_i, $i = 1,2,3,4$, indican constantes no nulas.

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

4. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar matrices elementales E_1 y E_2 tales que $E_2E_1A = I$.

   b) Hallar A^{-1}.

   c) Expresar A como el producto de matrices elementales.

5. Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

   Hallar matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 tales que $E_1A = B$, $E_2B = A$, $E_3A = C$ y $E_4C = A$.

6. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdades o falsas, justificando en cada caso.

   a) Si A y B son invertibles y $\alpha \neq 0$ entonces αAB es invertible y $(\alpha AB)^{-1} = \frac{1}{\alpha}B^{-1}A^{-1}$.

   b) Si A es invertible entonces $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

   c) Si A y B son invertibles entonces $A + B$ es invertible.

d) Si A y B son invertibles y $A+B$ es invertible, entonces $(A+B)^{-1} = A^{-1}+B^{-1}$.

e) Si A es invertible y AB no lo es, entonces B no es invertible.

7. Calcular la inversa de la siguiente matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix}.$$

8. **Matrices en bloques.**

a) Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times m}$ definimos la matriz $C \in \mathcal{M}_{(n+m)\times(n+m)}$ como

$$C = \begin{pmatrix} A & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & B \end{pmatrix},$$

donde $0_{r\times s}$ indica a la matriz nula de r filas y s columnas. Formalmente,

$$c_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i \le n, j \le n \\ b_{i-n,j-n} & \text{si } i > n, j > n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Demostrar que si A y B son invertibles entonces C es invertible.

b) Demostrar que si A y D son invertibles entonces

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

2. Rango de Matrices

1. *a*) Determine el rango de las matrices del ejercicio 1.1.

b) Determine el rango de las siguientes matrices

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \qquad e)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 2 & 3a-1 & a^2-a-4 \\ a & a^2 & a^2-2a-1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & a & a \\ 1 & a-3 & a-3 \\ 1 & 1 & a^2-15 \end{pmatrix}$$

Hallar el rango de A y B discutiendo según a real.

3. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}$. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar en cada caso:

   a) $\text{rango}(A) \leq m$
   b) $\text{rango}(A) = \text{mín}\{m, n\}$
   c) Si $\text{rango}(A) < n$ el sistema $AX = b$ es incompatible.
   d) El sistema $AX = b$ es compatible indeterminado si y solo si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) < n$.
   e) Si A es una matriz cuadrada de 2×2 invertible, entonces la matriz $B = A + 2Id$ (donde I es la matriz identidad de 2×2) también es invertible.

4. Sean A y $P \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que P es invertible. Demostrar que el rango de A es igual al rango de PA.

Guía del práctico

Para acompañar el curso se suguiere como mínimo resolver al menos la siguiente lista de problemas. No contabilizar dentro de esta lista los ejercicios resueltos en el pizarrón durante la clase.

- Sección 1: Ejercicio 1.1, uno por fila; Ejercicio 1.2, para una matriz; Ejercicio 1.3, una parte; Ejercicio 1.4; Ejercicio 1.6.
- Sección 2: Ejercicio 2.1.a), para las matrices usadas en el Ejercicio 1.1.; Ejercicio 2.1.b), una por fila; Ejercerico 2.3.