Examen - Matemática Discreta I

Miércoles 13 de diciembre de 2023.

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	Des. 1	Des. 2	Puntaje Total

Sugerencia: tenga cuidado al pasar las respuestas. Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir. Se deben llenar los recuadros que van desde MO1 hasta MO5. Los restantes recuadros ("Des. 1", "Des. 2" y "Puntaje Total") no se deben llenar y son para uso docente. Cada respuesta correcta de múltiple opción suma 10 *puntos. Respuestas incorrectas restan* 2 *puntos. Los dos ejercicios de desarrollo (correctos y completos) suman respectivamente* 20 *y* 30 *puntos. El examen se aprueba con un mínimo de* 60 *puntos. Se debe entregar el desarrollo escrito en lapicera. No se deben entregar fundamentos de sus respuestas de múltiple opción. La duración del examen es de 3 horas y media.*

Múltiple Opción 1

Hallar la función generatriz $a(x)$ de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = n(n-1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(A) $a(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$; (B) $a(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$; (C) $a(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$; (D) $a(x) = \frac{x^2}{(1-x)^3}$; (E) $a(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$.

Múltiple Opción 2

Determinar la cantidad de palabras que se pueden formar usando todas las letras de la palabra $SORORIDAD$ de modo que no aparezcan dos letras iguales consecutivas.
A) $181 \times 5!$; (B) $182 \times 5!$; (C) $183 \times 5!$; (D) $184 \times 5!$; (E) $185 \times 5!$.

Múltiple Opción 3

Sea G_0 el grafo simple con 10 vértices y ninguna arista. Para cada natural n definimos G_{n+1} como el grafo que se obtiene de G_n tras agregar un nuevo vértice adyacente a todos los vértices de G_n. Consideremos las siguientes afirmaciones.

I. El grafo G_{10} tiene 145 aristas.
II. El grafo G_{10} es conexo y no es plano.
III. El grafo G_{10} tiene algún circuito euleriano.
IV. El grafo G_{10} tiene algún ciclo hamiltoniano.

Indicar la opción correcta:
(A) Las afirmaciones I, II y III son verdaderas y la afirmación IV es falsa;
(B) Las afirmaciones I, II y IV son verdaderas y la afirmación III es falsa;
(C) Las afirmaciones I, III y IV son verdaderas y la afirmación II es falsa;
(D) Las afirmaciones II, III y IV son verdaderas y las afirmación I es falsa;
(E) Las afirmaciones I, II, III y IV son verdaderas.

Múltiple Opción 4

Determinar la cantidad de relaciones de equivalencia en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que satisfacen simultáneamente que $\#[1]$ es igual a 3 o a 4 y además $\#[1] > \#[2]$.
(A) 20; (B) 24; (C) 28; (D) 32; (E) 36.

Múltiple Opción 5

Sea a_n la cantidad de secuencias de largo n formadas con los números 0, 1, 2, 3 y 4 tales que dos entradas consecutivas difieren en magnitud exactamente en 1 y además la última entrada de la secuencia es 1 o 3. Hallar a_{21}.

Sugerencia: plantear una recurrencia homogénea para a_n.

(A) 3×2^{10}; (B) 2×3^{10}; (C) 3^{11}; (D) 5×2^{10}; (E) 4×3^{10}.

Ejercicio de Desarrollo 1 (Total: 20 puntos)

Demostrar que para todo entero $n \geq 1$ se cumple que $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Ejercicio de Desarrollo 2 (Total: 30 puntos)

Para cada entero $n \geq 1$, nos interesamos en el conjunto $\mathcal{C}_n$ formado por todos los grafos simples n-regulares con $2n$ vértices.

(1) Demostrar que el conjunto $\mathcal{C}_1$ contiene un único grafo a menos de isomorfismo, y dibujar este grafo.

(2) Demostrar que el conjunto $\mathcal{C}_2$ contiene un único grafo a menos de isomorfismo, y dibujar este grafo.

(3) Demostrar que el conjunto $\mathcal{C}_3$ contiene dos grafos a menos de isomorfismo, y dibujar estos dos grafos.

(4) Demostrar que existe un grafo del conjunto $\mathcal{C}_3$ que no es plano.

(5) Demostrar que para cada entero $n \geq 1$, todos los grafos que pertenecen al conjunto $\mathcal{C}_n$ son conexos.

(6) Demostrar que existe un entero $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$, ningún grafo perteneciente a $\mathcal{C}_n$ es plano.

Indicar claramente el método de demostración empleado en cada caso.
Justificar detalladamente cada paso del razonamiento utilizado en cada demostración.