

Examen - Matemática Discreta I

Miércoles 13 de diciembre de 2023

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

M01	M02	M03	M04	M05	Des. 1	Des. 2	Puntaje Total

Sugerencia: tenga cuidado al pasar las respuestas. Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir. Se deben llenar los recuadros que van desde MO1 hasta MO5. Los restantes recuadros (“Des. 1”, “Des. 2” y “Puntaje Total”) no se deben llenar y son para uso docente. Cada respuesta correcta de múltiple opción suma 10 puntos. Respuestas incorrectas restan 2 puntos. Los dos ejercicios de desarrollo (correctos y completos) suman respectivamente 20 y 30 puntos. El examen se aprueba con un mínimo de 60 puntos. Se debe entregar el desarrollo escrito en lapicera. No se deben entregar fundamentos de sus respuestas de múltiple opción. La duración del examen es de 3 horas y media.

Múltiple Opción 1

Determinar la cantidad de palabras que se pueden formar usando todas las letras de la palabra *SORORIDAD* de modo que no aparezcan dos letras iguales consecutivas.

(A) $181 \times 5!$; (B) $182 \times 5!$; (C) $183 \times 5!$; (D) $184 \times 5!$; (E) $185 \times 5!$.

Múltiple Opción 2

Hallar la función generatriz $a(x)$ de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $a_n = n(n - 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(A) $a(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$; (B) $a(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$; (C) $a(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$; (D) $a(x) = \frac{x^2}{(1-x)^3}$; (E) $a(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$.

Múltiple Opción 3

Determinar la cantidad de relaciones de equivalencia en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que satisfacen simultáneamente que $\#[1]$ es igual a 3 o a 4 y además $\#[1] > \#[2]$.

(A) 20; (B) 24; (C) 28; (D) 32; (E) 36.

Múltiple Opción 4

Sea G_0 el grafo simple con 10 vértices y ninguna arista. Para cada natural n definimos G_{n+1} como el grafo que se obtiene de G_n tras agregar un nuevo vértice adyacente a todos los vértices de G_n . Consideremos las siguientes afirmaciones.

- I. El grafo G_{10} tiene 145 aristas.
- II. El grafo G_{10} es conexo y no es plano.
- III. El grafo G_{10} tiene algún circuito euleriano.
- IV. El grafo G_{10} tiene algún ciclo hamiltoniano.

Indicar la opción correcta:

- (A) Las afirmaciones I, II y III son verdaderas y la afirmación IV es falsa;
- (B) Las afirmaciones I, II y IV son verdaderas y la afirmación III es falsa;
- (C) Las afirmaciones I, III y IV son verdaderas y la afirmación II es falsa;
- (D) Las afirmaciones II, III y IV son verdaderas y la afirmación I es falsa;
- (E) Las afirmaciones I, II, III y IV son verdaderas.

Múltiple Opción 5

Sea a_n la cantidad de secuencias de largo n formadas con los números 0, 1, 2, 3 y 4 tales que dos entradas consecutivas difieren en magnitud exactamente en 1 y además la última entrada de la secuencia es 1 o 3. Hallar a_{21} .

Sugerencia: plantear una recurrencia homogénea para a_n .

(A) 3×2^{10} ; (B) 2×3^{10} ; (C) 3^{11} ; (D) 5×2^{10} ; (E) 4×3^{10} .

Ejercicio de Desarrollo 1 (Total: 20 puntos)

Demostrar que para todo entero $n \geq 1$ se cumple que $\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Ejercicio de Desarrollo 2 (Total: 30 puntos)

Para cada entero $n \geq 1$, nos interesamos en el conjunto \mathcal{C}_n formado por todos los grafos simples n -regulares con $2n$ vértices.

- (1) Demostrar que el conjunto \mathcal{C}_1 contiene un único grafo a menos de isomorfismo, y dibujar este grafo.
- (2) Demostrar que el conjunto \mathcal{C}_2 contiene un único grafo a menos de isomorfismo, y dibujar este grafo.
- (3) Demostrar que el conjunto \mathcal{C}_3 contiene dos grafos a menos de isomorfismo, y dibujar estos dos grafos.
- (4) Demostrar que existe un grafo del conjunto \mathcal{C}_3 que no es plano.
- (5) Demostrar que para cada entero $n \geq 1$, todos los grafos que pertenecen al conjunto \mathcal{C}_n son conexos.
- (6) Demostrar que existe un entero $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$, ningún grafo perteneciente a \mathcal{C}_n es plano.

Indicar claramente el método de demostración empleado en cada caso.

Justificar detalladamente cada paso del razonamiento utilizado en cada demostración.