Solución - Examen de Matemática Discreta I

Miércoles 13 de diciembre de 2023

VERSIÓN 2

M01	M02	M03	M04	M05
E	C	B	D	B

Múltiple Opción 1

Hallar la función generatriz $a(x)$ de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = n(n-1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(A) $a(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$; (B) $a(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$; (C) $a(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$; (D) $a(x) = \frac{x^2}{(1-x)^3}$; (E) $a(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$.

Solución - Múltiple Opción 1

Recordemos que la función generatriz de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_n = 1$ es $b(x) = 1/(1-x)$. Luego, aplicando la definición de la derivada formal, conseguimos que:

$$b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 1x^n = \frac{1}{1-x};$$

$$b'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{-1}{(1-x)^2};$$

$$b''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Entonces: $a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n = x^2 b''(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$, y la opción correcta es la E.

Múltiple Opción 2

Determinar la cantidad de palabras que se pueden formar usando todas las letras de la palabra $SORORIDAD$ de modo que no aparezcan dos letras iguales consecutivas.
A) $181 \times 5!$; (B) $182 \times 5!$; (C) $183 \times 5!$; (D) $184 \times 5!$; (E) $185 \times 5!$.

Solución - Múltiple Opción 2

Sea $\mathcal{U}$ el conjunto que consiste en todas las palabras que se pueden formar usando todas las letras de la palabra $SORORIDAD$. Vamos a imponer las 3 condiciones siguientes a cada palabra de $\mathcal{U}$:

- c_O: las dos letras O aparecen consecutivas.
- c_R: las dos letras R aparecen consecutivas.
- c_D: las dos letras D aparecen consecutivas.

Queremos determinar la cantidad $n(\overline{c_O}, \overline{c_R}, \overline{c_D})$. Aplicando el principio de inclusión y exclusión sobre el conjunto $\mathcal{U}$ junto con sus tres condiciones c_O, c_R y c_D, tenemos que:

$$n(\overline{c_O}, \overline{c_R}, \overline{c_D}) = |\mathcal{U}| - n(c_O) - n(c_R) - n(c_D) + n(c_O, c_R) + n(c_O, c_D) + n(c_R, c_D) - n(c_O, c_R, c_D).$$

Por simetría se observa que $n(c_O) = n(c_R) = n(c_D)$, mientras que $n(c_O, c_R) = n(c_O, c_D) = n(c_R, c_D)$. Usando que en la palabra $SORORIDAD$ las letras O, R y D aparecen 2 veces cada una mientras que las restantes letras aparecen 1 vez, tenemos que $|\mathcal{U}| = 9!/(2!2!2!)$. Para hallar $n(c_0)$ podemos tomar el digrama OO como si fuese una única letra o símbolo dentro de la palabra (forzando a que aparezcan las dos letras O consecutivas). Entonces, ahora tenemos 8 símbolos, donde los símbolos A y R aparecen 2 veces y $n(c_O) = 8!/(2!2!)$. De modo similar, podemos hallar $n(c_O, c_R)$ tomando los digramas OO y RR como si fuesen una única letra o símbolo dentro de la palabra (forzando a que aparezcan las dos letras O y R consecutivas). En este caso tenemos 7 símbolos, donde el símbolo A aparece 2 veces y $n(c_O, c_R) = 7!/2!$. Por último, para hallar $n(c_O, c_R, c_D)$ forzamos a que aparezcan los digramas OO, RR y DD, que son 3 símbolos diferentes, por lo que tenemos 6 símbolos diferentes, y $n(c_O, c_R, c_D) = 6!$. Reemplazando los valores antes obtenidos tenemos que:

$$\begin{aligned} n(\overline{c_O}, \overline{c_R}, \overline{c_D}) &= |\mathcal{U}| - 3n(c_O) + 3n(c_O, c_R) - n(c_O, c_R, c_D) \\ &= 9!/(2!2!2!) - 3 \times 8!/(2!2!) + 3 \times 7!/2! - 6! \\ &= (9 \times 7 \times 6 - 3 \times 2 \times 7 \times 6 + 3 \times 7 \times 3 - 6) \times 5! = 183 \times 5!. \end{aligned}$$

Entonces, la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 3

Sea G_0 el grafo simple con 10 vértices y ninguna arista. Para cada natural n definimos G_{n+1} como el grafo que se obtiene de G_n tras agregar un nuevo vértice adyacente a todos los vértices de G_n. Consideremos las siguientes afirmaciones.

I. El grafo G_{10} tiene 145 aristas.
II. El grafo G_{10} es conexo y no es plano.
III. El grafo G_{10} tiene algún circuito euleriano.
IV. El grafo G_{10} tiene algún ciclo hamiltoniano.

Indicar la opción correcta:

(A) Las afirmaciones I, II y III son verdaderas y la afirmación IV es falsa;
(B) Las afirmaciones I, II y IV son verdaderas y la afirmación III es falsa;
(C) Las afirmaciones I, III y IV son verdaderas y la afirmación II es falsa;
(D) Las afirmaciones II, III y IV son verdaderas y las afirmación I es falsa;
(E) Las afirmaciones I, II, III y IV son verdaderas.

Solución - Múltiple Opción 3

Por construcción, el grafo G_1 tiene exactamente 10 aristas (una por cada vértice de G_0), y en general el grafo G_{n+1} tiene exactamente $10 + n$ aristas más que el grafo G_n. Por lo tanto, G_{10} tiene exactamente $\sum_{i=0}^{9}(10 + i) = 100 + \frac{9\times10}{2} = 145$ aristas, y la afirmación I es correcta.

Sean $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}$ los vértices de G_0 y $V' = \{v_{11}, v_{12}, \dots, v_{20}\}$ de modo que el conjunto de vértices de G_{10} es $V(G_{10}) = V \cup V'$. El vértice v_{20} tiene arista con cada uno de los 19 vértices restantes de G_{10}, por lo que tiene grado impar. Por el teorema de caracterización de circuitos eulerianos deducimos que G_{10} no tiene ningún circuito euleriano, y la afirmación III es falsa.

Además, por construcción, cada uno de los 10 vértices de V tiene una arista con cada uno de los 10 vértices de V'. Por lo tanto, G_{10} incluye al grafo bipartito completo $K_{10,10}$ como subgrafo recubridor. Como $K_{10,10}$ es hamiltoniano se sigue que G_{10} también es hamiltoniano, y la afirmación IV es correcta. Como G_{10} es hamiltoniano en particular es conexo. Como G incluye a $K_{10,10}$ que a su vez incluye a $K_{3,3}$ se deduce que G no es plano. Luego, la afirmación II es verdadera.

A partir del estudio anterior concluimos que las afirmaciones I, II y IV son verdaderas y la afirmación III es falsa. Luego, la opción correcta es la B.

Múltiple Opción 4

Determinar la cantidad de relaciones de equivalencia en el conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$ que satisfacen simultáneamente que $\#[1]$ es igual a 3 o a 4 y además $\#[1] > \#[2]$.

(A) 20; (B) 24; (C) 28; (D) 32; (E) 36.

Solución - Múltiple Opción 4

Vamos a aplicar la regla de la suma determinando primero aquellas relaciones de equivalencia que cumplen que $\#[1] = 3$ y $\#[1] > \#[2]$, luego aquellas que cumplen que $\#[1] = 4$ y $\#[1] > \#[2]$, y finalmente sumando ambas cantidades. Notemos que como en ambos casos $\#[1] > \#[2]$, el elemento 2 nunca pertenece a la clase del elemento 1.

- Si $\#[1] = 3$ entonces la clase del elemento 1 incluye exactamente a 2 elementos elegidos dentro del conjunto $\{3,4,5,6\}$. Hay $\binom{4}{2} = 6$ maneras de realizar tal elección. Como $\#[3] > \#[2]$ se sigue que la clase del elemento 2 puede tener exactamente 1 o 2 elementos. Si $[2]$ tiene exactamente 1 elemento entonces tiene únicamente al elemento 2. Luego, los dos elementos que no pertenecen a $[1]$ ni a $[2]$ pueden ir juntos en una tercera clase de equivalencia o bien separados en dos nuevas clases de equivalencia. Hasta aquíhemos obtenido $6 \times 2 = 12$ relaciones de equivalencia que cumplen que $\#[1] = 3$ y $\#[2] = 1$. Si $\#[2] = 2$ entonces hay $\binom{2}{1} = 2$ maneras de elegir el elemento que pertenece a $[2]$ distinto del 2, y el elemento restante va en una clase aparte. Luego hay un total de $6 \times 2 = 12$ relaciones de equivalencia que cumplen que $\#[1] = 3$ y $\#[2] = 2$. Tenemos entonces $12 + 12 = 24$ relaciones de equivalencia que cumplen que $\#[1] = 3$ y $\#[1] > \#[2]$.
- Si $\#[1] = 4$ entonces la clase del elemento 1 incluye exactamente a 3 elementos elegidos dentro del conjunto $\{3,4,5,6\}$. Hay $\binom{4}{3} = 4$ maneras de realizar tal elección. Para cada una de esas 4 maneras tenemos 2 relaciones de equivalencia posibles, según si la clase del elemento 2 consiste en uno o dos elementos. Luego tenemos $4 \times 2 = 8$ casos que cumplen que $\#[1] = 4$ y $\#[1] > \#[2]$.

En conclusión tenemos $24 + 8 = 32$ relaciones de equivalencia que cumplen lo pedido, y la opción correcta es la D.

Múltiple Opción 5

Sea a_n la cantidad de secuencias de largo n formadas con los números 0, 1, 2, 3 y 4 tales que dos entradas consecutivas difieren en magnitud exactamente en 1 y además la última entrada de la secuencia es 1 o 3. Hallar a_{21}.

Sugerencia: plantear una recurrencia homogénea para a_n.

(A) 3×2^{10}; (B) 2×3^{10}; (C) 3^{11}; (D) 5×2^{10}; (E) 4×3^{10}.

Solución - Múltiple Opción 5

Por simetría, la cantidad de secuencias a_n que terminan en 1 es la misma que la de las secuencias que terminan en 3. De hecho, toda secuencia $x_1x_2\cdots x_n$ que termina en 1 se corresponde de manera biyectiva con la secuencia $y_1y_2\cdots y_n$, donde $y_i = 4 - x_i$ para cada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, y dicha secuencia termina en 3.

Ahora, observemos que toda secuencia de largo n que termina en 1 tiene exactamente 3 maneras de ser extendida a una secuencia de largo $n+2$ que termina en 1 o en 3, que tienen precisamente los sufijos 121, 101, o bien 123. Por lo visto en el párrafo anterior, también hay exactamente 3 maneras de extender a toda secuencia de largo n que termina en 3 para obtener una secuencia de largo $n+2$ que termina en 1 o en 3. Pero entonces se cumple que $a_{n+2} = 3a_n$, y además $a_1 = 2$ (puesto que podemos empezar con 1 o bien con 3 Luego $a_{21} = a_1 \times 3^{10} = 2 \times 3^{10}$, y la opción correcta es la B.

Ejercicio de Desarrollo 1 (Total: 20 puntos)

Demostrar que para todo entero $n \geq 1$ se cumple que $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Solución - Ejercicio de Desarrollo 1

Para cada entero $n > 1$ vamos a considerar la proposición $P(n)$: $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Vamos a emplear el principio de inducción completa para probar que para todo $n \in$ se cumple $P(n)$.

Para el caso base probamos $P(0)$:

$$\sum_{i=0}^{0} i^3 = 0 \text{ y } \frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0 \text{ entonces } \sum_{i=0}^{0} i^3 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}$$

Para el paso inductivo suponemos que se cumple $P(n)$ y probamos que se cumple $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i^3 &= \sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \quad \text{por la hipótesis inductiva} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Como es cierto tanto el paso base como el paso inductivo, por el principio de inducción completa sobre los números naturales, $P(n)$ es cierta para todo $n \geq 1$.

Ejercicio de Desarrollo 2 (Total: 30 puntos)

Para cada entero $n \geq 1$, nos interesamos en el conjunto $\mathcal{C}_n$ formado por todos los grafos simples n-regulares con $2n$ vértices.

(1) Demostrar que el conjunto $\mathcal{C}_1$ contiene un único grafo a menos de isomorfismo, y dibujar este grafo.

(2) Demostrar que el conjunto $\mathcal{C}_2$ contiene un único grafo a menos de isomorfismo, y dibujar este grafo.

(3) Demostrar que el conjunto $\mathcal{C}_3$ contiene dos grafos a menos de isomorfismo, y dibujar estos dos grafos.

(4) Demostrar que existe un grafo del conjunto $\mathcal{C}_3$ que no es plano.

(5) Demostrar que para cada entero $n \geq 1$, todos los grafos que pertenecen al conjunto $\mathcal{C}_n$ son conexos.

(6) Demostrar que existe un entero $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$, ningún grafo perteneciente a $\mathcal{C}_n$ es plano.

Solución - Ejercicio de Desarrollo 2

(1) Sea $G = (V, E)$ un grafo 1-regular con 2 vertices. Tenemos que $2|E| = \sum_{v \in V} gr(v) = 2$ por lo que $|E| = 1$. El único grafo a menos de isomorfismo con 2 vértices y 1 arista es K_2, y se representa en la Figura 1.

(2) Sea G un grafo simple 2-regular con 4 vértices. Si G no fuese conexo entonces tendríamos al menos una de sus componentes conexas con 2 vértices o menos, pero entonces los vértices de esta componente no tienen grado igual a 2 lo que es absurdo puesto que G es simple. Luego, G es conexo. Como G es un grafo simple 2-regular y conexo debe ser un ciclo, por lo que G es isomorfo a C_4. El grafo C_4 se representa en la Figura 1.

(3) Sea G un grafo simple 3-regular con 6 vértices. Luego su complemento $\overline{G}$ es simple 2-regular con 6 vértices por lo que debe ser unión de ciclos. Luego, $\overline{G}$ debe ser isomorfo a C_6 o bien a $C_3 \cup C_3$. Por lo tanto, todos los grafos simples 3-regulares con 6 vértices no isomorfos son $G_1 = \overline{C_6}$ y $G_2 = \overline{C_3 \cup C_3}$. Notar que G_2 es el grafo bipartito completo $K_{3,3}$. El grafo G_1 se le conoce como el prisma de base triangular, que denotamos Y_3. Ambos grafos se representan en la Figura 1.

(4) El grafo G_2 es isomorfo a $K_{3,3}$. En particular, G_2 es homeomorfo a $K_{3,3}$. Por el Teorema de Kuratowski se concluye que G_2 no es plano.

(5) Sea G un grafo cualquiera perteneciente a la clase $\mathcal{C}_n$. Luego, G es un grafo simple n-regular con $2n$ vértices. Supongamos que G no es conexo. Sea v un vértice de G. Como G es simple y n-regular el vértice v tiene exactamente n vértices adyacentes diferentes, y la componente conexa que incluye al vértice v tiene al menos $n+1$ vértices. Entonces, cada una de las restantes componentes conexas son simples y tienen a lo sumo $n-1$ vértices por lo que el grado de cada uno de sus vértices es menor que o igual a $n-2$. Esto contradice que G es n-regular. La contradicción proviene de suponer que G no es conexo. Luego, todo grafo perteneciente a $\mathcal{C}_n$ es conexo, como queríamos demostrar.

(6) Vamos a probar que si $n \geq 5$ entonces ningún grafo de $\mathcal{C}_n$ es plano. Sea $G = (V, E) \in \mathcal{C}_n$ para algún $n \geq 5$ y supongamos que G es plano. Por la parte anterior, G es un grafo conexo. Luego, G es simple, conexo, y tiene al menos 3 vértices. Si G fuese plano entonces tendríamos que $|E| \leq 3|V| - 6$. Pero $|V| = 2n$, y aplicando la fórmula para la suma de los grados de los vértices aplicada al grafo G tenemos que $2|E| = \sum_{vinV} gr(v) = 2n^2$ por lo que $|E| = n^2$. Al reemplazar los cardinales de $|E|$ y $|V|$ recién obtenidos en la desigualdad $|E| \leq 3|V| - 6$, obtenemos que $n^2 \leq 6n - 6$ y esta última desigualdad para n implica que $n \leq 4$ lo que es absurdo. Luego, G no es plano. Como G es un grafo arbitrario perteneciente a la clase $\mathcal{C}_n$ y $n \geq 5$ es un entero positivo arbitrario, hemos probado que para todo $n \geq 5$ se cumple ningún grafo de la clase $\mathcal{C}_n$ es plano, como queríamos demostrar.

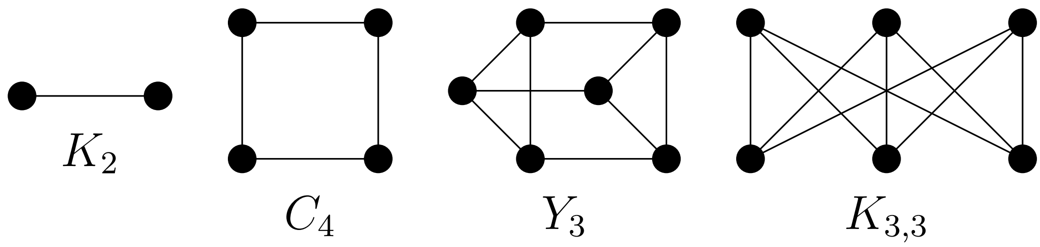

FIGURE 1. Grafos K_2, C_4, $K_{3,3}$ y Y_3.