Primer Parcial - Matemática Discreta I

Martes 26 de setiembre de 2023

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	Des. 1	Puntaje Total

Sugerencia: tenga cuidado al pasar las respuestas. Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.
Se deben llenar los recuadros que van desde MO1 hasta MO5. Los restantes recuadros con encabezado "Des. 1" y "Puntaje Total" no se deben llenar y son para uso docente.
Cada respuesta correcta de múltiple opción suma 6 puntos.
Respuestas incorrectas restan 1 punto.
El ejercicio de desarrollo correcto y completo suma 10 puntos.
Se debe entregar el desarrollo escrito en lapicera.
No se deben entregar fundamentos de sus respuestas de múltiple opción.
La duración del parcial es de tres horas.

Múltiple Opción 1

Sea n un entero positivo. Determinar la cantidad de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ tales que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se cumple que $|X \cap \{3i-2, 3i-1, 3i\}| = 1$.
(A) 3×2^n;
(B) n;
(C) 3^n;
(D) 2^{3n};
(E) 2^n.

Múltiple Opción 2

Determinar la cantidad de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ tales que $-7 \leq x_1 \leq 2$, $-7 \leq x_2 \leq 2$ y $-7 \leq x_3 \leq 2$.
(A) 24;
(B) 25;
(C) 26;
(D) 27;
(E) 28.

Múltiple Opción 3

Hallar el coeficiente en xy^2z^3 del polinomio $(x + y + y^2 + z^3 - 3)^5$.
(A) 300;
(B) 360;
(C) 420;
(D) 480;
(E) 540.

Múltiple Opción 4

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por $a_0 = 0$ y $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hallar a_{100}.
(A) 100×2^{100};
(B) 100×2^{99};
(C) 99×2^{100};
(D) 99×2^{99};
(E) 2^{100}.

Múltiple Opción 5

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números naturales definida por $a_n = (n+1)\binom{6}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Su función generatriz $a(x)$ es:
(A) $a(x) = 6(1+x)^5$;
(B) $a(x) = 6(1-x)^5$;
(C) $a(x) = (1+x)^6$;
(D) $a(x) = (1+x)^{-6}$;
(E) $a(x) = (1-x)^{-6}$.

Ejercicio de Desarrollo

Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ y para cada número natural n se tiene que $b_{n+3} = b_{n+2} + b_{n+1} + b_n$.

Sea $P(n)$ la siguiente proposición:

$$P(n) : \begin{cases} b_n \text{ es par si } n \text{ es par} \\ b_n \text{ es impar si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

El objetivo de este ejercicio es probar la siguiente afirmación: $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.
Para conseguirlo, se pide realizar los siguientes pasos:

(1) Indicar si se va a emplear el principio de inducción simple o fuerte.
(2) Enunciar el paso base.
(3) Demostrar el paso base.
(4) Enunciar el paso inductivo.
(5) Demostrar el paso inductivo.
(6) Concluir.

Justificar detalladamente cada paso de la demostración.