Distribución conjunta. Variables independientes.
Práctico 6

Ejercicio 1 : Se considera un grupo de nueve personas de las cuales hay dos que son contadores y tres que son abogados. Se eligen al azar cinco personas de ese grupo de nueve. Se definen: X = Cantidad de contadores en las cinco personas elegidas y Y = Cantidad de abogados en las cinco personas elegidas

1. ¿Qué valores pueden tomar las variables aleatorias X y Y?
2. Construir la función de probabilidad (puntual) conjunta de X y Y.
3. A partir del punto anterior, halle las funciones de probabilidad (puntual) marginales de X y Y.
4. Calcular $P\{X = Y\}$
5. ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?

Ejercicio 2 : Se consideran dos variables aleatorias: X, que toma los valores -1 y 1, y Y que toma los valores 2, 4 y 6 con las probabilidades conjuntas dadas por la siguiente tabla:

X/Y	2	4	6
-1	0,2	0,25	0,15
1	0,1	a	0,25

1. Hallar a.
2. Calcular $P\{X < 1, Y = 4\}$.
3. Hallar las funciones de probabilidad de $X + 2Y$, $X + Y$ y $|X - Y|$.

Ejercicio 3 : Se consideran dos variables aleatorias X e Y, que toman los valores 1, 2 y 3 cada una con las probabilidades conjuntas dadas en la siguiente tabla:

X/Y	1	2	3
1	0,02	0,08	c
2	a	0,08	0,1
3	0,06	b	0,3

1. Hallar a , b y c sabiendo que X y Y son independientes.
2. Calcular las funciones de probabilidad marginales.

Ejercicio 4 : Se consideran dos variables aleatorias: X, que toma los valores -1 y 1, y Y que toma los valores 0 , 1 y 2 con las probabilidades conjuntas dadas en la siguiente tabla:

X/Y	0	1	2
-1	0,4	0,2	0,1
2	0,05	a	0,15

1. Hallar a.
2. Hallar las funciones de probabilidad marginales de X y Y.
3. Hallar la función de probabilidad conjunta de $U = X + Y$ y $V = X - Y$
4. Hallar las funciones de probabilidad marginales de U y V
5. ¿Son X y Y independientes?
6. ¿Son U y V independientes?

Ejercicio 5 :

1. Sean X e Y dos variables aleatorias cuya distribución conjunta es

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1,\ y \geq 1, \\ y & \text{si } y \in [0,1)\,,\ x \geq y, \\ x & \text{si } x \in [0,1)\,,\ y \geq x, \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

   Hallar la distribuciones marginales F_X y F_Y.

2. Sean X e Y dos variables aleatorias cuya distribución conjunta es

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1, \quad y \geq 1, \\ y & \text{si } x \geq 1, \quad y \in [0,1)\,, \\ x & \text{si } x \in [0,1)\,, \quad y \geq 1, \\ xy & \text{si } x \in [0,1)\,, \quad y \in [0,1)\,, \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

   Hallar la distribución (marginal) F_X y la distribución (marginal) F_Y.

3. Si X e Y son variables aleatorias, ¿determinan las distribuciones marginales F_X y F_Y la distribución conjunta F_{XY}? ¿En qué caso determinan F_X y F_Y la distribución conjunta?

Ejercicio 6 : Se considera la siguiente función $p_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} k\,(2x+y) & \text{si } x \in \{0,1,2,3\}, \quad y \in \{1,2,3\}, \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

1. Hallar k para que p_{XY} sea función de probabilidad puntual conjunta.

2. Sean X e Y variables aleatorias discretas con $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ y $R_Y = \{1, 2, 3\}$, cuya función de probabilidad puntual conjunta es p_{XY}. Hallar las funciones de probabilidad puntuales (marginales) p_X y p_Y.
3. ¿X e Y son independientes? Justifique la respuesta.
4. Calcular $P\{1 \leq X < 3, 2 < Y \leq 3\}$ y $P\{X + Y < 3\}$.

Ejercicio 7 : Se considera la siguiente función $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kxy & \text{si } x \in (0, 4) \quad y \in (1, 5)\,, \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

1. Hallar k para que f_{XY} sea la función de densidad conjunta de dos variables aleatorias X, Y absolutamente continuas.
2. Hallar las densidades (marginales) f_X y f_Y.
3. Hallar la distribución conjunta F_{XY} y la distribuciones (marginales) F_X y F_Y.
4. ¿X e Y son independientes? Justifique la respuesta.
5. Calcular $P\{X \geq 3, Y \leq 2\}$ y $P\{X + Y > 4\}$.

Ejercicio 8 : Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $\mathtt{iid}$ con distribución F.

1. Calcular la función de distribución de $X_n^* = \text{máx}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.
2. Calcular la función de distribución de $X_1^* = \text{mín}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Ejercicio 9 :

1. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros μ y λ respectivamente. Hallar la distribución de la variable aleatoria $Z = \text{mín}\{X, Y\}$.
2. Para las variables de la parte anterior. Calcular $P\{X < Y\}$ en función de μ y λ.
3. Un sistema electrónico con dos componentes A y B puede ser afectado por tres tipos de shock eléctrico.
    a) Uno que sólo destruye a A y que se produce (partiendo de un instante inicial) en un tiempo X_1 que tiene distribución exponencial de parámetro λ_1.
    b) Uno que sólo destruye a B y que se produce (partiendo de un instante inicial) en un tiempo X_2 que tiene distribución exponencial de parámetro λ_2.

c) Uno que destruye a ambos componentes y que se produce (partiendo de un instante inicial) en un tiempo X_3 que tiene distribución exponencial de parámetro λ_3.

Sean T_1 y T_2 los tiempos de vida de los componentes A y B respectivamente. Asumiendo que las variables X_1, X_2 y X_3 son independientes; hallar en función de λ_1, λ_2 y λ_3 la probabilidad $P\{T_1 = T_2\}$.