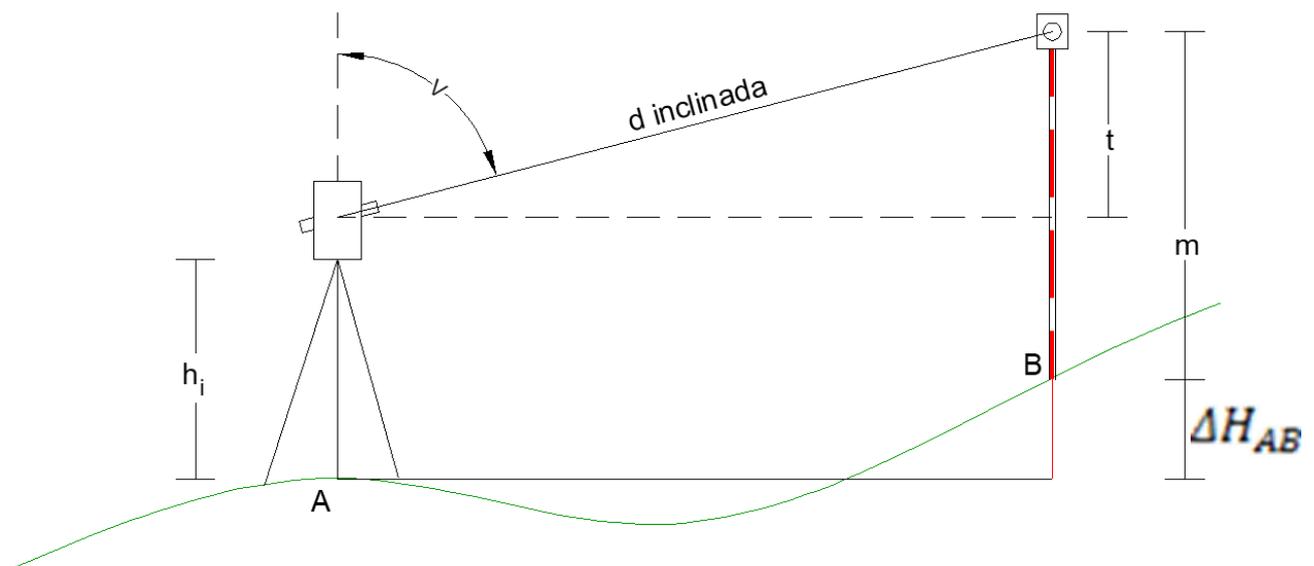


TEMA 7: NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA

INTRODUCCIÓN

El método consiste en hallar la diferencia de altura entre dos puntos, A y B, mediante la resolución trigonométrica de un triángulo rectángulo vertical, formado por la línea horizontal que pasa por el centro analítico del instrumento, estacionado sobre uno de los puntos, la vertical que pasa por el otro punto y la visual dada por el eje de colimación del referido instrumento.



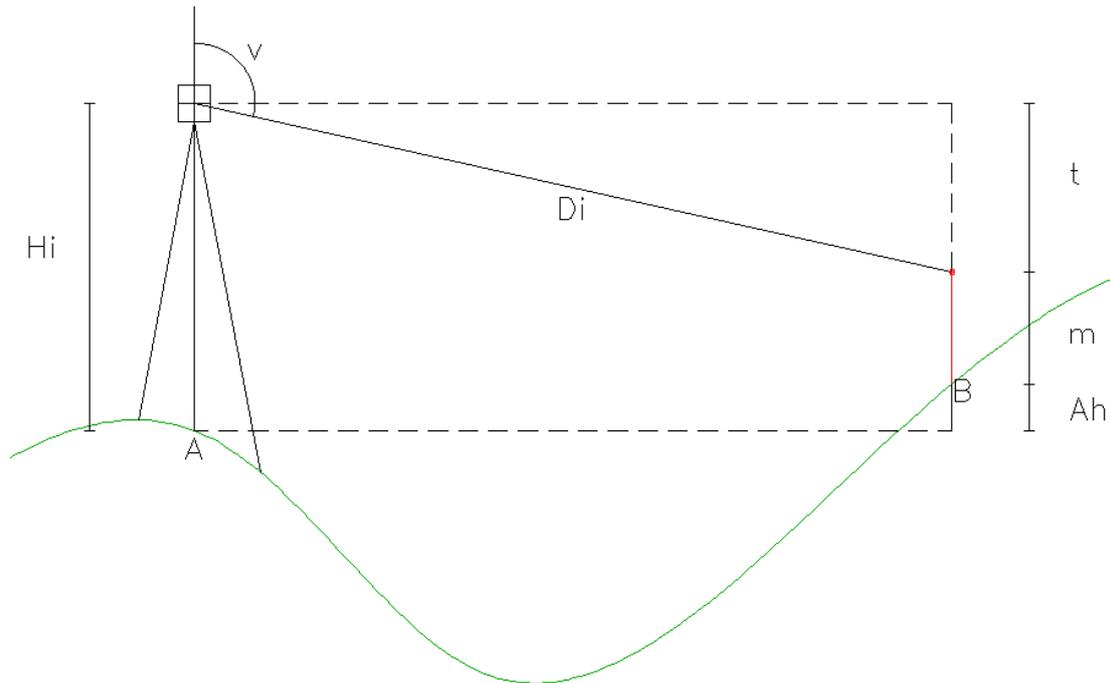
Considerando la imagen, se puede deducir la ecuación fundamental trigonométrica

$$\Delta H_{AB} = h_i + t - h_m = h_i + d \times \cos(V) - h_m$$

Siendo:

- h_i = Altura del instrumento
- d = Distancia inclinada
- V = Angulo Vertical
- h_m = Altura de mira

Si el ángulo vertical es mayor a 90° , la ecuación utilizada es similar, la será:



$$\Delta H_{AB} = h_i - t - h_m = h_i + d \times \cos(V) - h_m$$

ERRORES ASOCIADOS A LA NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA

Considerando la ecuación fundamental, el error en el ΔH_{AB} viene dado por la ecuación:

$$\sigma \Delta H^2 = \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial h_i} \right)^2 \times \sigma h_i^2 + \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial d} \right)^2 \times \sigma d^2 + \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial V} \right)^2 \times \sigma V^2 + \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial h_m} \right)^2 \times \sigma h_m^2$$

$$\sigma \Delta H^2 = \sigma h_i^2 + \cos(V)^2 \times \sigma d^2 + (d \times \sin(V))^2 \times \sigma V^2 + \sigma h_m^2$$

De esto se deduce que el error va a estar influido por la distancia inclinada, el ángulo vertical y las alturas del instrumento y del bastón.

El error por curvatura terrestre y refracción fue abordado en temas anteriores, su desarrollo es el mismo, salvo que, dado que las distancias que abarca una nivelación trigonométrica son mayores, deberán de tenerse en cuenta.

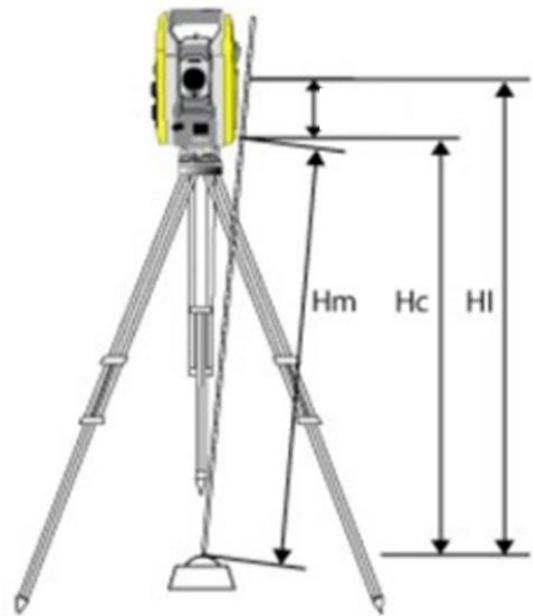
Por lo tanto, la ecuación del desnivel será:

$$\Delta H_{AB} = h_i - t - h_m = h_i + d \times \cos(V) - h_m + (1 - k) \frac{D^2}{2R}$$

Incertidumbre al evaluar la altura instrumental "h_i"

La altura del instrumental debe ser medida desde el centro analítico (donde se intersectan los 3 ejes de la estación) hasta el punto donde el instrumental se encuentra estacionado, por lo que se sobreentiende que la distancia que se mide, es el segmento de la vertical del lugar coincidente con el eje principal de la Estación total.

En general, esa altura se mide con cinta métrica, no es posible medir directamente el segmento del eje principal por razones claras, por lo que ocasionalmente, se termina midiendo una distancia inclinada que no coincide con la distancia requerida. Algunas marcas tienen estudiada esta diferencia y cuentan con un accesorio y cinta específica para medir dicha distancia.



H_m es la altura que se mide con la cinta, la cual es una distancia inclinada, que se debe corregir. Se forma un triángulo rectángulo entre el centro de la plomada óptica, el punto del instrumental desde que se mide la distancia y el punto materializado en el terreno.

Elementos intervienen en el error de la distancia inclinada "d_i"

Error instrumental: e_{inst}

Corresponde al error estándar asociado a la medida de electromagnética de distancias especificado por el fabricante.

En el caso de las ET se estima en $e_i = X\text{mm} \pm X\text{ppm}$

Error de estación: e_{est}

Corresponde al error relacionado a la puesta de estación del instrumento en un punto del terreno utilizando la plomada óptica, o plomada láser.

Se debe tener en cuenta el diámetro del punto donde se irá a estacionar, y en el caso de la plomada láser, el diámetro de la señal. Se puede considerar como máximo error, 1/3 del diámetro del punto materializado (clavo, estaca, varilla), siempre y cuando el punto materializado tenga mayor diámetro que el diámetro de la plomada láser o del grosor de la cruz.

Error de la señal: e_{señal}

Corresponde al error en el prisma al momento de ubicar el prisma sobre el punto a medir.

La incertidumbre asociada a la señal es diferente si se considera el prisma sobre un trípode o el prisma sobre un bastón.

Se debe considerar que, a través del tiempo, la punta del bastón se va desgastando, lo que genera que, además de influir en la altura del bastón, influye en el grosor del mismo.

Considerando el bastón en óptimas condiciones, el error máximo a considerar será de 1/3 del diámetro del punto donde se coloca el bastón (esto siempre y cuando el punto tenga mayor diámetro que la punta del bastón).

Error de inclinación del jalón: $e_{\text{inclinacion jalón}}$

Corresponde a la inclinación del jalón al momento de tomar la medida. Este error va a influir en la distancia “di” y en el ángulo vertical o cenital.

Los valores son diferentes si consideramos el bastón con nivel esférico o sin él.

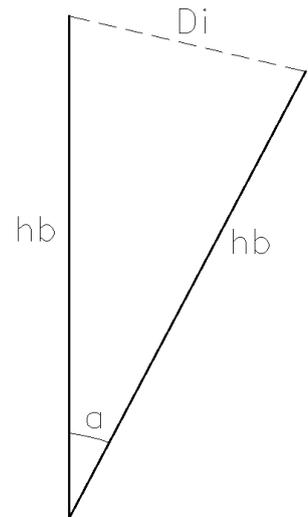
Considerando únicamente la influencia de la distancia inclinada, el bastón se encuentra formando un ángulo α con respecto a la vertical del lugar. Dicho bastón tiene una distancia “fija” denominada h_b . Aplicando el teorema del coseno se obtiene el error de inclinación del bastón.

$$\text{Por lo tanto, } e_{inc} = \pm h_b \cdot \sqrt{2(1 - \cos\alpha)}$$

Se debe de tener en cuenta que, dependiendo la dirección del bastón respecto de la vertical, el error puede ser mayor o menor

Considerando los errores antes mencionados, el error en la distancia inclinada será:

$$e_d = \sqrt{(e_{inst})^2 + (e_{est})^2 + (e_{señal})^2 + (e_{incl.jalón})^2}$$

Elementos intervienen en el error del ángulo cenital “V”Error de verticalidad: $e_{\text{verticalidad}}$

Este error depende del instrumento utilizado, y corresponde a la falta de verticalidad de la Estación total o teodolito utilizado. En el caso de la Estación Total, tiene un sensor de inclinación por lo que este error puede ser despreciable ($e_{\text{verticalidad}} \sim 0$)

Error de lectura: e_{lectura}

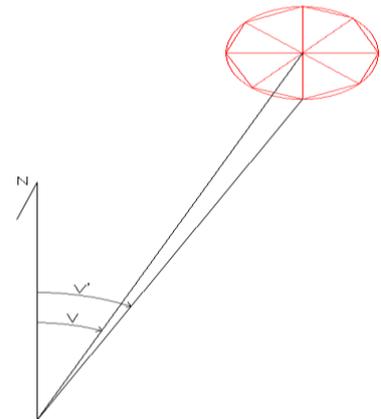
Depende del sistema de lectura (mecánico o electrónico). En el caso de la Estación Total podemos considerarlo despreciable, puesto que corresponde a un cálculo interno (interpolación) y el operador no tiene incidencia alguna en ello ($e_{\text{lectura}} \sim 0$)

Error de instrumental: e_{inst}

El fabricante proporciona este dato como desviación típica angular en las especificaciones instrumentales. Mientras mayor sea la precisión, menor el error en este sentido

Error de puntería: $e_{\text{puntería}}$

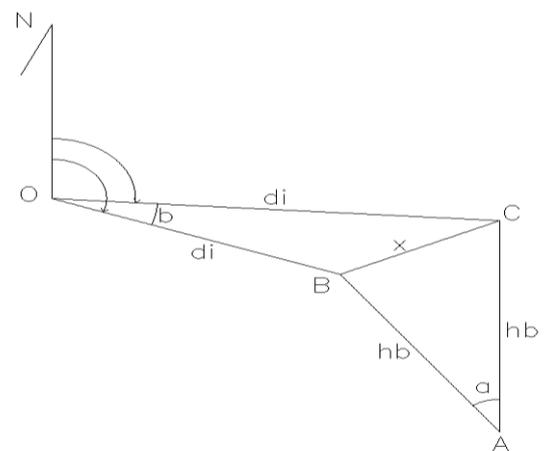
El error de puntería viene dado por no apuntar directamente al centro del prisma, esta diferencia dará como resultado una medición del ángulo vertical o cenital, mayor o menor respecto del centro del prisma. El error máximo a considerar será 1/3 del diámetro del prisma, aunque para distancias grandes puede considerarse el radio del mismo. este error vendrá dado en función de la distancia instrumento – prisma.



En las estaciones que cuentan con la funcionalidad de seguimiento de prisma, apuntan al centro del mismo, por lo que el error sería cero en buenas condiciones del instrumento. Para estos casos es importante la influencia de la verticalidad del bastón.

Error de inclinación del bastón: $e_{\text{inclinación.jalón}}$

Para determinar el error de inclinación del bastón que incide en el ángulo vertical, hay que considerar 2 triángulos en el espacio. A los efectos del cálculo se considera la distancia inclinada igual para cada ángulo, ya que fue previamente estudiada su influencia.



Para el triangulo ABC: $x = h_b \cdot \sqrt{2(1 - \cos\alpha)}$

Para el triangulo OBC: $\cos\beta = \frac{2d_i^2 - x^2}{2d_i^2}$

Considerando los errores antes mencionados, el error en la distancia inclinada será:

$$e_v = \sqrt{(e_{\text{vert}})^2 + (e_{\text{lec}})^2 + (e_{\text{inst}})^2 + (e_{\text{pun}})^2 + (e_{\text{incl.jalón}})^2}$$

Incertidumbre el término “hm”, correspondiente a la lectura de mira o altura del prisma:

Corresponde al error en el desnivel producto de la puntería al prisma al momento de tomar la observación.

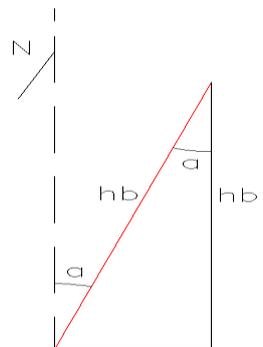
Para el caso de medición con Estación Total intervienen dos componentes:

- variable m': La que se relaciona directamente con la medida de la altura de la señal. Esta componente que varía si se considera el prisma sobre el bastón (error en la graduación del bastón) o si se encuentra sobre un trípode (error en medir altura del trípode más distancia de la base de éste a la señal).

- variable m'' : El error en la distancia cenital producto de la medición de este Angulo sobre el prisma o señal afectado por la falta de verticalidad.

La variable m' se comporta igual que la medición de la altura del instrumento, dependerá de la precisión del elemento con que este se mide. A diferencia de la medición de la altura del instrumento, es que la altura del bastón se mide con gran facilidad.

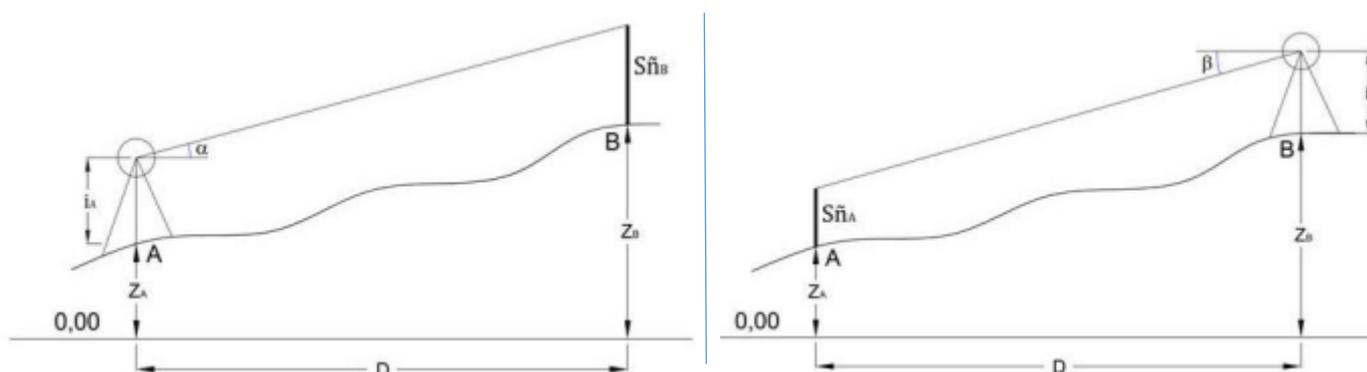
La variable m'' viene dado por la resolución trigonométrica del triángulo conformado por la vertical del lugar y la inclinación que tiene el bastón. La altura proyectada siempre será menor, que la que se introdujo manualmente en la Estación, por lo que la componente z de los puntos se ubicarán en un plano más bajo.



$$e_{hm} = \sqrt{(e_{m'})^2 + (e_{m''})^2}$$

NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA RECÍPROCA Y SIMULTÁNEA

Si al mismo tiempo dos operadores observan, uno midiendo un ángulo vertical α desde A hacia B y el otro un ángulo vertical β , desde B hacia A, y si admitimos que la refracción en los puntos A y B es aproximadamente la misma por pasar los rayos de luz que emanan de B y A aproximadamente por las mismas capas de aire, puede obtenerse un valor para el desnivel ΔZ entre ambos puntos, sin considerar los efectos de la curvatura terrestre y la refracción atmosférica.



Para la estación en A: $Z_B = Z_A + i_A + D \cdot \text{tg}\alpha - S\tilde{n}_A + \frac{D^2}{2R}(1 - k)$

Para la estación en B: $Z_A = Z_B + i_B + D \cdot \text{tg}\beta - S\tilde{n}_B + \frac{D^2}{2R}(1 - k)$

$$Z_B - Z_A = Z_A - Z_B + i_A - i_B + D \cdot (\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta) - S\tilde{n}_A + S\tilde{n}_B$$

$$2(Z_B - Z_A) = i_A - i_B + D \cdot (\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta) - S\tilde{n}_A + S\tilde{n}_B$$

$$\Delta Z_{AB} = \frac{i_A - i_B + D \cdot (\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta) - S\tilde{n}_A + S\tilde{n}_B}{2}$$

Así se puede calcular el desnivel entre los puntos A y B sin tener en cuenta el efecto de curvatura y refracción terrestres.

NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA A 2 PUNTOS EQUIDISTANTES

Supongamos ahora que se requiere conocer el AH entre los puntos A y B, tal que no se ubica la estación total en ninguno de estos puntos. El instrumental se ubica en un punto C, el desnivel entre A y C, y entre B y C será:

$$\Delta H_{AC} = h_i + t - h_m = h_{iA} + d' \times \cos(V') - h_{mA}$$

$$\Delta H_{CB} = h_i + t - h_m = h_{iB} + d \times \cos(V) - h_{mB}$$

El desnivel entre A y B, será entonces:

$$\Delta H_{AB} = \Delta H_{AC} - \Delta H_{CB} = h_{iA} + d' \times \cos(V') - h_{mA} - (h_{iB} + d \times \cos(V) - h_{mB})$$

Dado que las lecturas hacia A y B se hacen desde la misma estación, la altura del instrumento es la misma. A su vez, se puede fijar el prisma en la misma altura. Por lo que:

$$\Delta H_{AB} = d' \times \cos(V') - d \times \cos(V)$$

De esta manera, deja de ser necesario medir la altura del instrumental, así como la altura del prisma. Aunque los errores de verticalidad siguen influyendo y hay que considerarlos.

Si las distancias AC y BC son equidistantes, los efectos por curvatura terrestre y refracción atmosférica se verán eliminados, ya que la distancia es la misma y las observaciones se realizan casi en simultáneo.

BIBLIOGRAFÍA

- Chueca Pazos, Manuel; Herráez Boquera José y Berné Valero José Luis: tratado de topografía 1- redes topográficas y locales. microgeodesia. editorial parainfo s.a. o dossat sa. Madrid.
- Chueca Pazos, Manuel; Herráez Boquera José y Berné Valero José Luis: tratado de topografía 2- métodos topográficos. editorial parainfo s.a. o dossat sa. Madrid.
- Jordan, W.: tratado general de topografía (ed. gilli). Dominguez Garcia Tejero, Francisco. topografía general y aplicada. (ed. dossat. Buenos Aires. 1984)