Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Matemática Discreta 1

Examen 31 de julio de 2024

Respuestas Verdadero o Falso: rellenar con **V** o **F**					
VF1	VF2	VF3	VF4	VF5	VF6
F	F	V	V	V	V

Correcta: 5 puntos. Incorrecta: -3 puntos. Sin responder: 0 puntos.

Respuestas múltiple opción: rellenar con **A**, **E**, **I** u **O**					
MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	MO6
A	I	E	E	O	I

Correcta: 12 puntos. Incorrecta: -4 puntos. Sin responder: 0 puntos.

Verdadero o Falso

1. Existen 119 números naturales entre 1 y 429 que son múltiplos de 3 pero no son múltiplos de 11 ni de 13.

Solución: **Falso**
Comenzamos observando que $429 = 3 \times 11 \times 13$. Luego, múltiplos de 3 hay $143 = 11 \times 13$. Por otro lado, múltiplos de 33 hay 13 (éstos son los múltiplos de 3 y 11 al mismo tiempo). Igualmente múltiplos de 39 hay 11 (éstos son los múltiplos de 3 y 13 al mismo tiempo). Finalmente múltiplos de 429 hay 1 (éstos son los múltiplos de 3, 11 y 13, al mismo tiempo).
Usando el **P**rincipio de **I**nclusión **E**xclusión, hay 120 números naturales entre 1 y 429 que son múltiplos de 3 pero no son múltiplos de 11 ni de 13:

$$143 - 13 - 11 + 1 = 120.$$

2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, se considera la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ determinada por las siguientes condiciones:

- $[1] = \{1\}$
- $2\,\mathcal{R}\,3$ y $5\,\mathcal{R}\,6$
- $\#[6] = 4$
- existe una clase con exactamente dos elementos.
- 2 no está relacionado con 8.
- 6 no está relacionado con 8.

Entonces $\mathcal{R}$ determina exactamente 3 clases de equivalencia en A.

Solución: **Falso**
Todas las posibles relaciones de equivalencia que verifican las condiciones determinan 4 clases de equivalencia. Sabemos que $\{2, 3\} \subseteq [2]$ y que $\{5, 6\} \subseteq [6]$ y a la vez sabemos que $8 \notin [2]$, y también tenemos que $8 \notin [6]$.
Luego se nos plantean dos opciones: $[2] = [6]$, o bien $[2] \neq [6]$.

- $[2] = [6]$:
  En este caso tenemos ya: $[1] = \{1\}$, y $[6] = [2] = \{2, 3, 5, 6\}$, pues $[6]$ tiene 4 elementos. Como la letra del ejercicio dice que tiene que haber una clase con exactamente dos elementos, entonces hay dos clases más, formadas por $4, 7$ y 8, una con dos elementos y otra con un elemento. En total serán 4 clases de equivalencia.
- $[2] \neq [6]$:
  En este caso como $\#[6] = 4$, los únicos elementos que pueden acompañar a 5 y 6 son $4, 7$, o sea que $[6] = \{4, 5, 6, 7\}$. También tenemos $[1] = \{1\}$ y como $8 \notin [2]$ entonces $[8] = \{8\}$. Luego las clases son: $[1] = \{1\}$, $[8] = \{8\}$, $[2] = \{2, 3\}$, $[6] = \{4, 5, 6, 7\}$. O sea que en este caso también son 4 clases de equivalencia.

3. $\sum\limits_{i=0}^{9} (-1)^i C_i^9 (9 - i)^9 = 9!$.

Solución: **Verdadero**
La primer expresión es la fórmula para $\mathrm{Sob}(m, n)$ tomando $m = n = 9$. Pero sabemos que, si $m = n$ las funciones sobreyectivas pasan a ser biyectivas. Por ende el número de funciones biyectivas entre conjuntos con 9 elementos es $9!$. Entonces ambos números coinciden, y el resultado es verdadero.

4. Existen valores $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$an^3 + bn^2 + cn + d + \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{(n+1)^2(2n+1)}{6}.$$

Solución: **Verdadero**
Sabemos que

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Este resultado podía recordarse, o bien hacer la IC para confirmarlo. Luego, la igualdad inicial se transforma en: existen valores $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$an^3 + bn^2 + cn + d = \frac{(n+1)^2(2n+1)}{6} - \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{(n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6}.$$

Alcanza entonces con tomar: $a = 0$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{2}$ y $d = \frac{1}{6}$.

5. Dada la sucesión $(1, 1, C_2^3 \cdot 3, C_1^3 \cdot 3, C_2^4 \cdot 3^2, C_2^4 \cdot 3^2, C_2^5 \cdot 3^3, C_3^5 \cdot 3^3, C_2^6 \cdot 3^4, C_4^6 \cdot 3^4, \dots)$ su función generatriz se puede expresar como

$$\frac{1+x}{(1-3x^2)^3}.$$

Solución: **Verdadero**

$$\frac{1}{(1-3x^2)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (3 \cdot x^2)^n \cdot \mathrm{CR}_n^3 = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^{2n} \cdot \mathrm{C}_n^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot x^{2n} \cdot \mathrm{C}_2^{n+2}.$$

Entonces:

$$\frac{1+x}{(1-3x^2)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_2^{n+2} \cdot 3^n \cdot x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_2^{n+2} \cdot 3^n \cdot x^{2n+1} =$$

$$= 1 + 0x + \mathrm{C}_2^3 \cdot 3 \cdot x^2 + 0x^3 + \mathrm{C}_2^4 \cdot 3^2 \cdot x^4 + \cdots \quad + \quad 0 + 1x + 0x^2 + \mathrm{C}_1^3 \cdot 3 \cdot x^3 + 0x^4 + \mathrm{C}_2^4 \cdot 3^2 \cdot x^5 + \cdots =$$

$$= 1 + 1x + \mathrm{C}_2^3 \cdot 3 \cdot x^2 + \mathrm{C}_1^3 \cdot 3 \cdot x^3 + \mathrm{C}_2^4 \cdot 3^2 \cdot x^4 + \mathrm{C}_2^4 \cdot 3^2 \cdot x^5 + \cdots$$

Entonces la afirmación es verdadera.

6. Se considera un grafo $G = (V, E)$ con $\#V = 19$ y $\#E = 16$ entonces G no es conexo.

Solución: **Verdadero**
Asumamos que G es conexo. Consideramos $T = (V_T, E_T)$ árbol recubridor del grafo $G = (V, E)$. Como es recubridor entonces: $\#V_t = \#V$ y $\#E_t \leq \#E$. Por ser árbol se tiene que $\#V_t = \#E_t + 1$.
Entonces

$$19 = \#V = \#V_t = \#E_t + 1 \leq E + 1 = 16 + 1 = 17, \text{ absurdo}.$$

Conclusión, G no puede ser conexo.

Múltiple Opción

1. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Sea r_n el número de árboles recubridores del grafo bipartito $K_{2,n}$. Entonces r_n es:

A) $n2^{n-1}$.

E) $2n(n-1)+1$.

I) $(n-1)2^n + 2 - n$.

O) $\frac{(n-1)n}{2}4^n - (n-1)2^n + 2 - n$.

Solución: **A**

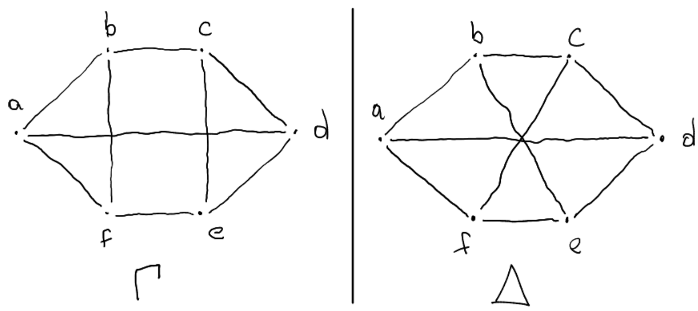
Llamemos x_1, x_2, y z_1, $z_2, \cdots, z_n$, los vértices del grafo $K_{2,n}$, tales que las aristas son todas de la forma: $x_i - z_j$.

- Primera observación: todos los vértices zetas tienen grado 2, y a la hora de elminar aristas, para clasificar los árboles recubridores, no se pueden eliminar las dos aristas en un vértice de la forma z_j porque quedaría aislado.
- Segunda observación: en un árbol recubridor quedará a lo sumo un vértice de la familia de los zetas, con grado 2. Asúmase, por absurdo, que hay dos vértices: z_{j_1} y z_{j_2} con grado 2 en un árbol recubridor. Entonces se formaría un ciclo entre los cuatro vértices: $x_1, x_2, z_{j_1}, z_{j_2}$, pero en los árboles no hay ciclos.

  Ya sabemos de las observaciones anteriores que todos los vértices zetas tienen que tener grado mayor o igual a 1 en el árbol recubridor, y que a lo sumo hay un vértice zeta con grado 2.
- Tercera observación: un vértice zeta tiene que tener grado 2 en el árbol recubridor. Si todos los vértices zetas tuvieran grado 1, cada vértice estaría conectado o bien con x_1 o bien con x_2. Luego habría dos componentes conexas, y no sería un árbol recubridor.

  Conclusión: para obtener un árbol recubridor, los vértices zetas tienen todos, excepto uno, grado 1, y uno tiene grado 2. Luego, tenemos que elegir cuál es el vértice que queda con grado 2. Tenemos n posibilidades. Decidido cuál es el vértice que queda con grado 2 en el árbol recubridor, nos queda, para el resto de los vértices z_j, eliminar una de las dos aristas para obtener el árbol recubridor. En cada caso tenemos 2 posibilidades. Total: $n \times 2^{n-1}$ posibilidades.

2. ¿Cuáles de los siguientes grafos son isomorfos a $K_{3,3}$?



A) Ninguno.

E) El grafo Γ.

I) El grafo Δ.

O) Ambos grafos.

Solución: **I**

Es claro que Δ es de la forma $K_{3,3}$ tomando $\Delta = (V_\Delta, E_\Delta)$, con $V_\Delta = V_1 \cup V_2$, con $V_1 = \{a, c, e\}$ y $V_2 = \{b, d, f\}$, observando que las aristas de E_Δ solo conectan vértices V_1 con vértices de V_2. Luego Δ es isomorfo a $K_{3,3}$.

Por otro lado Γ no es un grafo bipartito, pues se puede observar que hay 3-ciclos, como el que determinan a, b, f.

3. La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Fibonacci si cumple $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Si además cumple que $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ decimos que es la sucesión de Fibonacci clásica.

Se considera el siguiente grafo:

Sea g_n la cantidad de caminos de largo n que comienzan en a y terminan en b o c.

Entonces, la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

A) No es una sucesión de Fibonacci.

E) Es la sucesión de Fibonacci clásica.

I) Es una sucesión de Fibonacci, con $g_2 = 1$, $g_3 = 1$.

O) Coincide con la sucesión de Fibonacci clásica para $n = 0, 1, 2, 3, 4$, pero para $n \geq 5$ difieren.

Solución: **E**

Es claro que $g_0 = 0$, $g_1 = 1$, $g_2 = 1$, y que $g_3 = 2$, etc. Los téminos iniciales coincide con la sucesión de Fibonacci clásica. Para calcular g_n, o sea la cantidad de caminos de largo n que comienzan en a y terminan en b o c, consideramos los caminos de largo $n - 1$:

- cada camino de largo $n - 1$ que terminaba en b o c genera un camino de largo n terminando en b o c (simplemente extendiendo el camino con un arista más conectado esos vértices). O sea, son g_{n-1} casos.
- cada camino de largo $n-1$ que terminaba en a o d también genera un camino de largo n terminando en b o c, por razomanientos similares. Ahora, todo camino de largo $n-1$ que termine en a proviene indefectiblemente de un camino de largo $n - 2$ que terminaba en b, y todo camino de largo $n - 1$ que termine en d proviene indefectiblemente de un camino de largo $n-2$ que terminaba en c. Entonces la cantidad de caminos de largo $n - 1$ que terminan en a o d es igual a g_{n-2}.

Conclusión: $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$, para todo $n \geq 2$. Luego, la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de Fibonacci clásica.

4. Sea R un retículo con 5 elementos con exactamente una anticadena de 3 elementos.
Entonces:

A) La cadena más larga tiene 2 elementos.

I) Hay 5 anticadenas con 2 elementos.

E) Hay 3 cadenas de largo 3.

O) Hay exactamente una cadena de largo 3.

Solución: **E**

Al ser R un retículo con cinco elementos, y una anticadena de 3 elementos, el diagrama de Hasse tiene que ser el siguiente:

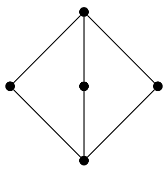


Figura 1: Retículo R

Luego hay 3 cadenas de largo 3.

5. ¿Cuántas maneras de colocar 14 monedas de 1 peso en 5 alcancías distintas, de tal manera que todas tengan al menos 2 monedas pero no más de 5 monedas?

A) 60.

E) 75.

I) 70.

O) 65.

Solución: **O**

Una forma, usando funciones generatrices, es encontrar el coeficiente de x^{14} en $f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^5$. Pero

$$(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^5 = x^{10}(1 + x + x^2 + x^3)^5 = x^{10}\frac{(1 - x^4)^5}{(1 - x)^5}.$$

O sea que deberíamos encontrar el coeficiente de x^4 en $\frac{(1-x^4)^5}{(1-x)^5}$, o sea el coeficiente de x^4 en

$$(1-\mathrm{C}_1^5\cdot x^4+\mathrm{C}_2^5\cdot x^8-\cdots)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{CR}_n^5\cdot x^n) = (1-\mathrm{C}_1^5\cdot x^4+\mathrm{C}_2^5\cdot x^8-\cdots)\cdot(1+\mathrm{CR}_1^5\cdot x^1+\mathrm{CR}_2^5\cdot x^2+\mathrm{CR}_3^5\cdot x^3+\mathrm{CR}_4^5\cdot x^4+\cdots).$$

Las formas de obtener x^4 son: $1\cdot\mathrm{CR}_4^5\cdot x^4$ o bien $(-5)\cdot x^4\cdot 1$. El coeficiente que se obtiene es: $\mathrm{CR}_4^5-5 = \mathrm{C}_4^8-5 = 65$.

6. El hipercubo H_5 de dimensión 5 es el grafo cuyos vértices son las 5-uplas de ceros y unos, tales que dos 5-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas, por ejemplo $(0, 0, 0, 0, 0)$ es adyacente a $(1, 0, 0, 0, 0)$ pero no a $(1, 0, 0, 0, 1)$.

Llamemos s_5 al número de caminos simples comenzando en $(0, 0, 0, 0, 0)$ y terminando en $(1, 1, 1, 1, 1)$. Entonces:

A) $s_5 < 2^5$. **E**) $2^5 < s_5 < 5!$. **I**) $5! \leq s_5$. **O**) $s_5 = 2^5$.

Solución: **I**

Los caminos simples desde $(0,0,0,0,0)$ hasta $(1,1,1,1,1)$ **en cada paso** cambian una sola coordenada, que pasa de 0 a 1 o de 1 a 0. Contaremos solo los caminos simples crecientes, es decir, que pasen sus coordenadas de 0 a 1.

¿Cuántos caminos simples crecientes hay desde $(0,0,0,0,0)$ hasta $(1,1,1,1,1)$? En cada paso tenemos que cambiar una de sus coordenadas de 0 a 1. Obsérvese que al ser crecientes son simples.

Por lo tanto tenemos que elegir el orden en que incrementamos las variables. Son 5 coordenadas y podemos elegirlas en cualquier orden, creando así 5! caminos simples crecientes.
Se concluye que: $5! \leq s_5$.

Nota: se puede observar que hay caminos simples que no son crecientes. A modo de ejemplo:

$$(0,0,0,0,0) - (1,0,0,0,0) - (1,1,0,0,0) - (1,1,1,0,0) - (1,1,1,1,0) - (1,1,0,1,0) - (1,1,0,1,1) - (1,1,1,1,1).$$