# Práctico 2 – Matrices, operaciones entre matrices, y aplicaciones

Denotaremos por $I_n$ y $0_n$ respectivamente a la matriz identidad y la matriz nula de tamaño $n \times n$. En caso que se sobrentienda el tamaño, las denotaremos simplemente por $I$ y $0$.

## 1. Matrices

1. Construir las siguientes matrices

$$a) \quad A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{3\times 4}, \; a_{ij} = i + j \qquad b) \quad B = ((b_{ij})) \in \mathcal{M}_{3\times 3}, \; b_{ij} = \begin{cases} i & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

2. Consideremos matrices $A$ y $B$ de dimensión $4 \times 5$ y matrices $C$, $D$ y $E$ de dimensiones $5 \times 2$, $4 \times 2$ y $5 \times 4$ respectivamente. Todas las matrices tienen sus entradas en el mismo conjunto numérico. Determine cuáles de las siguientes operaciones están definidas:

$$BA, \quad AC + D, \quad AE + B, \quad AB + B, \quad E(A + B), \quad EAC.$$

En caso de estarlo, indique las dimensiones de la matriz resultante.

3. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Realizar las siguientes operaciones: $AB$, $BC$, $B + B^t$, $AA^t$, $A^tA$, $(AB)C$, $A(BC)$ y $DE - ED$.

4. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar todas las matrices $2 \times 2$ que conmuten con $A$. Dar un ejemplo de una matriz que no conmute con $A$.

5. Sea $\delta(i_0, j_0) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ definida por $\delta(i_0, j_0)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \text{ y } j = j_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   a) Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, describir la matriz $\delta(1,1)A$ en función de los valores $a_{i,j}$. Repetir para $A\delta(1,1)$.
   b) Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, describir la matriz $\delta(1,2)A$ en función de los valores $a_{i,j}$. Repetir para $A\delta(1,2)$.
   c) Describir $\delta(i_0, j_0)A$ para $i_0, j_0$ cualesquiera.

6. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   a) Si la primera y tercera columna de $B$ son iguales, también lo son la primera y tercera columna de $AB$;
   b) Si la primera y tercera fila son iguales en $B$, también lo son en $AB$;
   c) Si la primera y tercera fila son iguales en $A$, también lo son en $AB$;
   d) Si $A$ y $B$ son matrices $n \times n$ entonces
      1) $(AB)^2 = A^2B^2$;
      2) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
      3) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
   e) Si $A \neq O_n$ y $AB = AC \;\Rightarrow\; B = C$
   f) Si el producto $AB$ entre las matrices $A$ y $B$ está definido entonces también lo está el producto $BA$.

# 2. Operadores en matrices y matrices especiales

1. **Trasposición de matrices**

   *a*) Demostrar que $(A+B)^t = A^t + B^t$, $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ y $(AB)^t = B^t A^t$ (siendo $A$ y $B$ conformables).

   *b*) Sea $A$ una matriz de tamaño $n \times n$ tal que $A^t = \lambda A$ donde $\lambda \neq \pm 1$. Mostrar que $A$ es $0_n$.

   *c*) Sean $A$ y $B$ matrices cuadradas tales que $A = qB^t$ y $B = pA^t$, para un par de números $p$, $q$. Probar que $A = 0 = B$ o $pq = 1$.

2. **Traza de una matriz**

   Sea $A$ una matriz cuadrada. Se define la **traza** $tr(A)$ de la matriz $A$ como la suma de todos los elementos de su diagonal. Entonces, si $A = ((a_{ij}))$ es una matriz $n \times n$ tendremos

   $$tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

   *a*) Probar que si $A$ y $B$ son matrices cuadradas $n \times n$:

   $$tr(A+B) = tr(A) + tr(B), \qquad tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A), \qquad tr(A) = tr(A^t)$$

   *b*) Sabiendo que $tr(AB) = tr(BA)$, demostrar que no existen matrices cuadradas $A$ y $B$ $n \times n$ tales que $AB - BA = I_n$.

   *c*) Sea $A$ una matriz de $n \times n$. Probar que $tr(AA^t) \geq 0$ y $tr(AA^t) = 0$ si solo si $A = 0_n$.

# 3. Geometría

En los ejercicios de esta sección los puntos del plano se representarán como matrices $2 \times 1$. Por ejemplo el punto (1,3) se representará como $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^t$ y a veces también como $(1,3)^t$.

1. **Matriz de la simetría respecto a la recta $x = y$.**

   Sea $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

   $$S\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   *a*) Representar en el plano los siguientes puntos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t$ y $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t$, y sus respectivas imágenes por la función $S$. Para estos puntos dibujar un flecha entre $p$ y $S(p)$. Interpretar geométricamente.

   *b*) Bosquejar las siguientes figuras y sus imágenes por $S$.

   *a*) $x = 5$ *b*) $x + y = 0$ *c*) $x - y = 0$ *d*) $x - y = 2$

   *c*) Probar que la función $S$ es biyectiva y calcular su inversa.

2. **Matriz de giro de ángulo $\theta$.**

   Para un número $\theta \in [0, 2\pi)$ se considera la matriz $G_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, y se define la función $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante la fórmula

   $$R_\theta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = G_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   *a*) Calcular para $(1,0)^t$ y $(0,1)^t$ sus imágenes al aplicar $R_\theta$ e interpretar geométricamente el resultado (Sugerencia: bosquejar en el plano los puntos y sus imágenes).

   *b*) Dados $\theta$ y $\psi$, ¿cuál es el resultado $Z$ de calcular $Y = R_\theta(X)$ siendo $X = (1,0)^t$ y luego $Z = R_\psi(Y)$? ¿Cómo se interpreta esto geométricamente?

   *c*) Comparar el resultado anterior con la acción de la función $R_{\theta+\psi}$. ¿Qué famosas fórmulas trigonométricas pueden deducirse de estas manipulaciones?

## 4. Aplicaciones

1. Una empresa constructora tiene contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, nórdico y colonial. La cantidad de material a emplear en cada tipo de casa está dado por la siguiente tabla (en ciertas unidades):

| | Hierro | Madera | Vidrio | Pintura | Ladrillos |
|---|---|---|---|---|---|
| Moderno | 5 | 20 | 16 | 7 | 17 |
| Nórdico | 7 | 18 | 12 | 9 | 21 |
| Colonial | 6 | 25 | 8 | 5 | 13 |

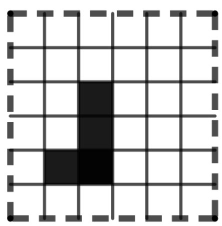
   *a*) Utilizar un producto de matrices para determinar cuántas unidades de cada material serán empleadas si va a construir 5, 7 y 12 casas de tipo moderno, nórdico y colonial, respectivamente.

   *b*) Si los precios por unidad de hierro, madera, vidrio, pintura y ladrillos son 15, 8, 5, 1 y 10.¿Cuál es el precio unitario de cada tipo de casa?

   *c*) ¿Cuál es el costo total del material a emplear?

   *d*) ¿Cómo sería la función de costo si quiero construir $M$ casas de tipo moderno, $N$ de tipo nórdico y $C$ de tipo colonial?

2. **Imágenes** En este ejercicio se estudiará como a partir de operaciones de matrices podemos manipular una imagen. Una imagen en blanco y negro (sin grises) puede representarse como una matriz de ceros y unos, donde un 0 representa un bit negro mientras que un 1 representa uno blanco.



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 1: Imagen de ejemplo (donde cada cuadrado representa un bit) junto a su matriz

   *a*) Asumiendo que lo importante es la parte negra y se quiere trasladar un lugar hacia la derecha. Encontrar $B \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$ tal que $AB$ sea una solución al problema.

   *b*) Suponga ahora que se quiere reflejar la imagen (como si se viera en un espejo). Encontrar $B \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$ tal que $AB$ sea una solución al problema.

   *c*) Determine alguna forma de pasar de la imagen a su negativo (intercambiar bits blancos y negros) a partir de operaciones con matrices.

**Guía del práctico**

Para acompañar el curso se suguiere como mínimo resolver al menos la siguiente lista de problemas. No contabilizar dentro de esta lista los ejercicios resueltos en el pizarrón durante la clase.

- Sección 1: Ejercicio 1.1, uno; Ejercicio 1.2, 3 partes; Ejercicio 1.3, cuatro partes; Ejercicio 1.6.
- Sección 2: un ejercicio.
- Sección 3: un ejercicio.
- Sección 4: un ejercicio.