PRÁCTICO 1: SISTEMAS DE NUMERACIÓN Y DIVISIBILIDAD.

Sistemas de numeración

Ejercicio 1.

a. Escribir en las bases 2, 4 y 16 los números decimales 137 y 6243.

b. Escribir en la base 28 el número decimal 16912.

c. Escribir en las bases 2 y 10 los números hexadecimales $A7$, $4C2$, $1C2B$ y $A2DFE$.

d. Escribir en las bases 10 y 16 los números binarios 11001110, 00110001, 11110000 y 01010111.

e. Escribir en la base decimal el número dado en la base indicada: $OJO_{(25)}$.

Ejercicio 2. En este ejercicio vamos a utilizar la siguiente numeración de los **28** símbolos:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	␣
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Queremos asociar una secuencia de números enteros a una secuencia de palabras (por ejemplo una frase). Para esto hacemos lo siguiente:

1 Separamos el texto original en bloques de tres caracteres (incluyendo el espacio en blanco). Por ejemplo, si el texto es "MUY BIEN", se obtienen tres bloques: $\boxed{\texttt{M}|\texttt{U}|\texttt{Y}}\boxed{\sqcup|\texttt{B}|\texttt{I}}\boxed{\texttt{E}|\texttt{N}|\sqcup}$.

2 A cada bloque de letras $\boxed{\texttt{X}|\texttt{Y}|\texttt{Z}}$, le asociamos el bloque de enteros según la tabla de arriba $\boxed{x|y|z}$.

3 A este bloque de enteros le asociamos el entero: $x \times 28^2 + y \times 28^1 + z \times (28)^0$.

Por ejemplo, al bloque $\boxed{\texttt{M}|\texttt{U}|\texttt{Y}}$ le corresponde el bloque $\boxed{12|21|25}$; y a este bloque de enteros le hacemos corresponder el entero: $12 \times (28)^2 + 21 \times (28)^1 + 25 \times (28)^0 = 10021$.

a. Halle la secuencia de enteros que se obtienen de la frase: "Me encanta el carnaval".

b. Halle la frase correspondiente a la siguiente secuencia de enteros: 768, 7048, 337, 6397.

Ejercicio 3. En el *Juego del Polinomio* alguien elige (en secreto) un polinomio de coeficientes enteros no negativos, y de cualquier grado. Es decir, un polinomio de la forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \; a_i \in \mathbb{Z}, \; a_i \geq 0, \; \forall \, i.$$

Nosotros tenemos que adivinar de qué polinomio se trata. Para esto podemos preguntar cuánto vale el polinomio en los valores que consideremos oportunos. El objetivo del juego es adivinar el polinomio con la menor cantidad de preguntas.

a. Consideremos primero una **versión simplificada** del juego, en la que sabemos que los coeficientes cumplen: $0 \leq a_i < 5$, para todo i.

i) Probar que para adivinar el polinomio basta con conocer el valor $p(5)$.

ii) Determinar el polinomio si nos dicen que $p(5) = 89$.

b. Consideremos ahora la **versión general** del juego, donde solamente sabemos que los coeficientes son enteros y no negativos.

i) Supongamos que la persona elige el polinomio $p(x) = 2x^2 + 7x + 4$. Notar que $p(5) = 89$. ¿Es suficiente conocer $p(5)$ para adivinar el polinomio p? ¿Qué cambia respecto al caso anterior?

ii) Dar una estrategia que permita adivinar cualquier polinomio, en la menor cantidad de preguntas (evaluaciones). Las preguntas pueden ser todas al mismo tiempo, o de forma secuencial, luego de conocer el resultado de cualquiera de las preguntas anteriores.

Ejercicio 4. En un libro de mil hojas, numeradas del 1 al 1000, se arrancan todas las hojas cuyo número contenga algún dígito impar (p. ej. se eliminan las hojas $7, 12, 93, 100$, pero no la 248). Luego de arrancar las hojas:

a. Determinar la posición que ocupa una hoja numerada de la forma:

i) $00c$, con $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ii) $0b0$, con $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ iii) $a00$, con $a \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$

b. Probar que la posición que ocupa la hoja numerada abc, con $a, b, c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, es:

$$\text{posición}(abc) = \frac{a}{2} \times 5^2 + \frac{b}{2} \times 5 + \frac{c}{2}.$$

c. Usando la expresión anterior, determinar: qué posición ocupa la hoja que aparece con el número 246, y qué hoja ocupa la posición 34.

Divisibilidad

Ejercicio 5. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de:

a. la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18.

b. la división de $a^2 + 7$ por 36.

Ejercicio 6. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Probar o refutar con un contraejemplo las siguientes afirmaciones:

a. Si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$.

b. Si $a|b$ entonces $ac|bc$.

c. Si $a \nmid bc$ entonces $a \nmid b$ y $a \nmid c$.

d. Si $ac|bc$ entonces $a|b$.

e. Si $a|bc$ entonces $a|b$ o $a|c$.

f. Si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$.

g. Si $4|a^2$ entonces $2|a$.

h. Si $9|b+c$ entonces $9|b$ o $9|c$.

i. Si $a + c|b + c$ entonces $a|b$.

Ejercicio 7. Demostrar que el producto de tres naturales consecutivos es múltiplo de 6.

Ejercicio 8. Probar que $n(2n + 1)(7n + 1)$ es divisible entre 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 9. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

a. $99 | \left(10^{2n} + 197\right)$.

b. $56 | \left(13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1\right)$.

Ejercicio 10. Sea $n \in \mathbb{N}$ cuya representación en base 10 es $a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$. Demostrar que:

a. $2|n$ si y sólo si $2|a_0$.

b. $4|n$ si y sólo si $4|a_1 a_0$.

c. $8|n$ si y sólo si $8|a_2 a_1 a_0$.

d. Generalizar en base a los casos anteriores.

e. Investigar si 32 divide a 1.273.460.

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 11. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de:

a. la división de $4a + 1$ por 9,

b. la división de $7a^2 + 12$ por 28.

Ejercicio 12. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

a. $56 | 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$

b. $256 | 7^{2n} + 208n - 1$

Ejercicio 13. Un número natural se dice *perfecto* si es igual a la suma de todos sus divisores positivos propios. Por ejemplo, 6 es perfecto pues: $6 = 1 + 2 + 3$.

a. Verificar que 28 y 496 son perfectos.

b. Probar que si $2^m - 1$ es primo entonces $2^{m-1}(2^m - 1)$ es perfecto.

Ejercicio 14. De los números del 1 al 200 se eligen 101 números cualesquiera. Probar que entre los elegidos hay al menos dos números a y b tales que a divide a b.